

CENTRO UNIVERSITÁRIO ASSIS GURGACZ

EDSON LUIZ PESSUTTI

**DETERMINAÇÃO DE COTAS DO MODELO DE WALKER
VIA METODOLOGIA *FAST CRACK BOUNDS***

**CASCADEL - PR
2020**

CENTRO UNIVERSITÁRIO ASSIS GURGACZ

EDSON LUIZ PESSUTTI

**DETERMINAÇÃO DE COTAS DO MODELO DE WALKER
VIA METODOLOGIA *FAST CRACK BOUNDS***

Trabalho apresentado na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II, do Curso de Engenharia Mecânica, do Centro Universitário Assis Gurgacz, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Professor Orientador: Me. Eng. Mec. Bruno dos Santos

**CASCADEL - PR
2020**

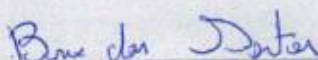
CENTRO UNIVERSITÁRIO ASSIS GURGACZ

EDSON LUIZ PESSUTTI

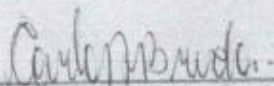
**DETERMINAÇÃO DE COTAS DO MODELO DE WALKER
VIA METODOLOGIA *FAST CRACK BOUNDS***

Trabalho apresentado no Curso de Engenharia Mecânica do Centro Universitário Assis Gurgacz, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica, sob orientação do Professor Me. Eng. Agrícola Bruno dos Santos.

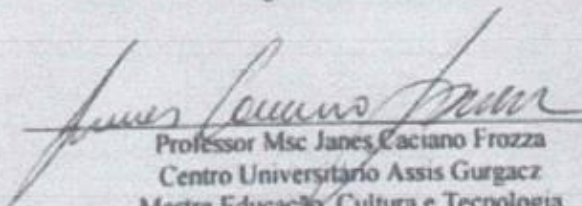
BANCA EXAMINADORA



Orientador Professor Msc. Bruno dos Santos
Centro Universitário Assis Gurgacz
Engenheiro Agrícola



Professor Msc. Carlos Breda
Centro Universitário Assis Gurgacz
Engenheiro Mecânico



Professor Msc. Janes Cacicano Frozza
Centro Universitário Assis Gurgacz
Mestre Educação, Cultura e Tecnologia

Cascavel, 02 de Dezembro de 2020

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais e à minha esposa,
que sempre me apoiaram e incentivaram a busca do sucesso.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, meu agradecimento é a Deus.

Agradeço também aos meus pais, que me deram todo o apoio necessário durante a trajetória acadêmica.

Igualmente, agradeço à minha esposa, por compreender todas as dificuldades durante essa longa caminhada, encorajando-me sempre.

De modo especial, agradeço ao professor orientador, Mestre Bruno dos Santos, por sua dedicação e preocupação no decorrer da execução de todo o projeto de pesquisa. Da mesma forma, estendo meu muito obrigado ao colegiado de professores do Curso de Engenharia Mecânica do Centro Universitário Assis Gurgacz.

RESUMO

PESSUTTI, Edson Luiz. **Determinação de cotas do modelo de Walker via metodologia *Fast Crack Bounds***. 2020. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Engenharia Mecânica) – Centro Universitário Assis Gurgacz, 2020.

A técnica *Damage-Tolerant Design* assume que todos os componentes possuem trincas. Através de carregamentos cíclicos, essas trincas podem se propagar, levando o componente à completa ruptura. Atualmente, a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) disponibiliza vários modelos matemáticos para descrever o crescimento da trinca. Esses são classificados em CATC e CATV. Neste trabalho, apresenta-se a aplicação da metodologia *Fast Crack Bounds* para o estabelecimento da função, tendo em vista as cotas superiores e inferiores para o modelo de propagação de trinca de Walker. O desempenho da metodologia é avaliado pela combinação dos métodos de SMC e RK4, utilizando três exemplos clássicos da mecânica da fratura: placa infinita com trinca central, placa finita com trinca central e placa finita com trinca na aresta.

Palavras-chave: Trincas. Modelo de Walker. Metodologia *Fast Crack Bounds*.

ABSTRACT

PESSUTTI, Edson Luiz. **Determination of quotas of the walker model via Fast Crack Bounds methodology**. 2020. 46 f. Undergraduate thesis (Mechanical Engineering Course) – Assis Gurgacz University Center, Cascavel, PR, 2020.

A “Damage Tolerant Design” technician assumes that all components have cracks. Through cyclical loading this defect can spread, causing the component to break completely. Currently, the linear Elastic Fracture Mechanics (MFLE) provides several mathematical models to describe the crack growth. These are classified into CATC and CATV. This work presents the application of the Fast Crack Bounds methodology for the establishment of the function, establishing the upper and lower dimensions for the Walker crack propagation model. The performance of the methodology is evaluated by combining the SMC and RK4 methods. Three classic examples of fracture mechanics will be used: infinite plate with central crack, finite plate with central crack and finite plate with crack at the edge.

Keywords: Cracks. Walker model. Fast Crack Bounds methodology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Volante com a coluna de direção quebrada.	18
Figura 2: Barra de direção local da quebra.....	19
Figura 3: Etapas da propagação de trinca por fadiga.....	20
Figura 4: Modos de abertura de trinca.....	21
Figura 5: Regiões da propagação de trincas	23
Figura 6: Placa infinita com trinca central.....	31
Figura 7: Placa finita com trinca central.....	31
Figura 8: Placa finita com trinca na aresta	32
Figura 9: Função cotas com a solução numérica aproximada	35
Figura 10: Imagem 7 ampliada.....	35
Figura 11: Desvio relativo para as cotas superior e inferior.....	36
Figura 12: Função erro relativo da média aritmética das cotas	37
Figura 13: Desvio relativo do erro da média aritmética das cotas	37
Figura 14: Função cotas superior e inferior com a solução numérica aproximada	38
Figura 15: Desvio relativo para as cotas superior e inferior.....	38
Figura 16: Função erro relativo da média aritmética das cotas	39
Figura 17: Desvio relativo do erro da média aritmética das cotas	39
Figura 18: Função cotas superior e inferior com a solução numérica aproximada	40
Figura 19: Desvio relativo para as cotas superior e inferior.....	40
Figura 20: Função erro relativo da média aritmética das cotas	41
Figura 21: Desvio relativo do erro da média aritmética das cotas	41

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1:	Parâmetros para modelo de propagação de trincas de Walker.....	30
QUADRO 2:	Tempo aproximado em segundos das cotas e RK4 (exemplo 1).....	34
QUADRO 3:	Tempo aproximado em segundos das cotas e RK4 (exemplo 2).....	36
QUADRO 4:	Tempo aproximado em segundos das cotas e RK4 (exemplo 3).....	38
QUADRO 5:	Comparação dos resultados nos 3 exemplos.....	39

LISTA DE EQUAÇÕES

EQUAÇÃO 1:	Modelo de Paris-Erdogan.....	20
EQUAÇÃO 2:	Modelo de Walker.....	21
EQUAÇÃO 3:	Método RK4 segundo teorema de Taylor com resto de Lagrange.....	22
EQUAÇÃO 4:	Método RK4 com equivalência a $\theta \in (0,1)$	22
EQUAÇÃO 5:	Método FCB.....	22
EQUAÇÃO 6:	Expansão da função tamanho de trinca.....	22
EQUAÇÃO 7:	Utilização das hipóteses com majorações adequadas.....	23
EQUAÇÃO 8:	Formulação dos modelos matemáticos para evolução de trincas.....	24
EQUAÇÃO 9:	Validação das cotas superior e inferior.....	26
EQUAÇÃO 10:	Prova das hipóteses H2, H3 e H4.....	26
EQUAÇÃO 11:	Representação das desigualdades.....	26
EQUAÇÃO 12:	Descrição das hipóteses H2, H3 e H4.....	26
EQUAÇÃO 13:	Conclusão das hipóteses H2, H3 e H4.....	27
EQUAÇÃO 14:	Aplicação de $C > 0$	27
EQUAÇÃO 15:	Segunda derivada das hipóteses H2, H3 e H4.....	27
EQUAÇÃO 16:	Obtenção das cotas superior e inferior.....	27
EQUAÇÃO 17:	Função correção do fator de intensidade de tensão da placa infinita com trinca central.....	29
EQUAÇÃO 18:	Função correção do fator de intensidade de tensão da placa finita com trinca central.....	29
EQUAÇÃO 19:	Função correção do fator de intensidade de tensão da placa infinita com trinca na aresta.....	30
EQUAÇÃO 20:	Função desvio relativo na avaliação das cotas.....	31
EQUAÇÃO 21:	Função média aritmética das cotas.....	31
EQUAÇÃO 22:	Função média geométrica das cotas.....	32
EQUAÇÃO 23:	Função erro relativo.....	32

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CATC	–	Carregamento com Amplitude de Tensão Constante
CATV	–	Carregamento com Amplitude de Tensão Variável
FCB	–	<i>Fast Crack Bounds</i>
FIT	–	Fator de Intensidade de Tensão
MFLE	–	Mecânica da Fratura Linear Elástica
PVI	–	Problema de Valor Inicial
RK4	–	Runge-Kutta de quarta ordem
SMC	–	Simulação de Monte Carlo
TCC	–	Trabalho de Conclusão de Curso

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Tamanho da trinca
a_0	Tamanho da trinca inicial
a^*	Tamanho da trinca estrela para a cota superior
$\bar{a}$	Tamanho da trinca obtido na cota superior do método FCB
$\underline{a}$	Tamanho da trinca obtido na cota inferior do método FCB
b	Largura da placa
C_p	Parâmetro do modelo de Paris-Erdogan
C_w	Parâmetro do modelo de Walker
$\frac{da}{dN}$	Taxa de crescimento da trinca
$\in$	Pertença a conjunto
$f(\cdot)$	Função correção do FIT
H	Lei genérica para a evolução da trinca
m_p	Parâmetro do modelo de Paris-Erdogan
N	Números de ciclos
N_0	Números de ciclos iniciais
N_1	Números de ciclos finais
σ	Tensão nominal
R	Razão entre tensão mínima e tensão máxima
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reais
ΔK	Variação de FIT
$\forall$	Quantificação universal

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 OBJETIVOS	14
1.1.1 Objetivo Geral	14
1.1.2 Objetivos Específicos	15
1.2 JUSTIFICATIVA	15
1.3 CARACTERIZAÇÕES DO PROBLEMA.....	15
1.4 DELIMITAÇÕES DA PESQUISA.....	16
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	17
2.1 FADIGA	17
2.2 ANÁLISES DE FADIGA FATO HISTÓRICO	17
2.3 ESTÁGIOS DA FADIGA.....	19
2.4 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA (MFLE)	20
2.5 MODELOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS.....	21
2.5.2 Modelo de Walker.....	23
2.5.3 Modelo numérico pelo método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4)	24
2.5.5 Simulação de Monte Carlo (SMC)	25
3 METODOLOGIA.....	26
3.1 METODOLOGIA <i>FAST CRACK BOUNDS</i> APLICADA AO MODELO DE WALKER.....	27
3.2 TEOREMA APLICADO AO MÉTODO FCB	28
3.3 DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	30
3.4 RESULTADOS NUMÉRICOS	30
3.4.1 Exemplo 1: Placa infinita com trinca central.....	30
3.4.2 Exemplo 2: Placa finita com trinca central.....	31
3.4.3 Exemplo 3: Placa finita com trinca na aresta	32
3.5 DESEMPENHO DAS COTAS SUPERIOR E INFERIOR.....	33
3.6 APLICAÇÃO DA METODOLOGIA A UM PROBLEMA DE ENGENHARIA	33
3.7 RESULTADOS do MODELO DE WALKER.....	34
3.7.1 Exemplo 1: Trinca central em placa infinita	35
3.7.2 exemplo 2: Trinca na aresta em placa finita	37
3.7.3 Exemplo 3: Trinca central em placa finita	40
3.8 SÍNTESE DOS RESULTADOS.....	42
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	43
5 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	44

REFERÊNCIAS..... 45

Apêndice A..... 47

1 INTRODUÇÃO

A fadiga em componentes estruturais é algo que ocorre com muita frequência, pois, quando há algum carregamento de tensões sobre um ponto ou vários, de forma cíclica, podem aparecer trincas ou fraturas após certo número de ciclos (ASTM, 2000, p. 1034).

Por intermédio da metodologia de mecânica da fratura linear elástica, é possível avaliar os danos em fadiga, assim como estudar a ocorrência da propagação das trincas nos materiais. Todavia, se a existência da trinca se apresentar em conformidade com as tolerâncias aceitáveis no regime de trabalho, não acarreta necessariamente uma falha. Assim sendo, em situação de trabalho, o acompanhamento e o monitoramento da evolução da trinca são de extrema importância para manutenções preventivas e preditivas. Através desse processo, verifica-se a vida útil do material, viabilizando, com frequência, o agendamento da troca ou da manutenção do componente mecânico.

Nesse sentido, evidencia-se o uso de alguns modelos de propagação de trincas que favorecem o trabalho de monitoramento. O modelo estudado neste trabalho é o de Walker (1970, *apud* BEDEN *et al.* 2009) que abrange a região II do diagrama semelhante ao modelo de Paris-Erdogan (1963). Em virtude de serem formulados matematicamente como Problemas de Valor Inicial (PVI), tais modelos são apropriados para os casos em que o Fator Intensidade de Tensão (FIT) é identificado claramente.

A metodologia *Fast Crack Bounds* (FCB), de Ávila Jr., Santos e Beck (2016), auxilia na minimização desse problema, uma vez que, ao determinar funções de cotas inferiores e superiores para uma função tamanho da trinca, delimita a conduta das soluções do modelo de propagação desta.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Determinar as funções de cotas superior e inferior para o modelo de propagação de trincas de Walker por meio da metodologia FCB.

1.1.2 Objetivos Específicos

Formular a estrutura matemática da metodologia FCB para o modelo de Walker.

Desenvolver o algoritmo e programar a implementação computacional.

Realizar a simulação numérica e a avaliação dos resultados.

1.2 JUSTIFICATIVA

Em decorrência do processo denominado fadiga, os componentes de órgãos das máquinas acabam sofrendo fraturas. À vista disso, o estudo da propagação de trincas é fundamental, haja vista que a fadiga nada mais é do que a própria propagação que ocorre devido à aplicação de ciclos repetitivos de certa carga em um determinado ponto ou em vários. Consequentemente, vários modelos são considerados na análise da propagação.

De modo específico, neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), coloca-se em evidência o modelo de Walker (1970, *apud* BEDEN *et al.* 2009)) que, juntamente com a metodologia FCB, pode fornecer resultados que favorecem a composição de uma estratégia de manutenções preventivas e preditivas com menor esforço computacional.

Com o foco, portanto, na análise direta do problema, o método FCB possibilita o aperfeiçoamento de recursos no processo de gerenciamento de dados e componentes mecânicos com trincas, alcançando-se, assim, uma redução de tempo e dos custos das manutenções. Dessa forma, este trabalho contribui para os estudos realizados pela comunidade científica e por engenheiros que necessitam de um acompanhamento rápido e eficaz em relação à propagação de trincas.

1.3 CARACTERIZAÇÕES DO PROBLEMA

Qual a viabilidade do uso do modelo de Walker, juntamente com a metodologia FCB, em estruturas mecânicas nas quais pode ocorrer fadiga e acarretar uma fratura?

1.4 DELIMITAÇÕES DA PESQUISA

O trabalho como um todo, incluindo os experimentos e a coleta de dados, foi desenvolvido em uma versão gratuita para estudantes do MatLab na cidade de Cascavel, PR.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 FADIGA

Fadiga é um processo que gera falhas em materiais metálicos. Esse fato ocorre devido à ruptura do material submetido a tensões variáveis, mesmo com a aplicação das tensões máximas abaixo das tensões limites e com a ruptura do componente mecânico abaixo do limite de escoamento do material (SHIGLEY, 1984).

Em conformidade com os estudos de Dieter (1981), dentre os fatores que podem causar uma falha por fadiga destacam-se: tensão alta, flutuação na tensão aplicada, número de ciclos de aplicação de tensão, concentração de tensão, corrosão, temperatura, sobrecarga, tensões residuais e tensões combinadas.

Desta forma foram evidenciados vários casos de fadiga durante toda a história, sendo um que foi marcante para o Brasil.

2.2 ANÁLISES DE FADIGA FATO HISTÓRICO

Buscando-se uma compreensão geral acerca do fenômeno chamado fadiga é interessante ressaltar um momento que ficou na história, o acidente de Ayrton Senna.

No dia 1º de maio de 1994 na sétima volta da GP de San Marino, Senna perde o controle de seu carro por conta da quebra da coluna de direção, e passa reto na curva “Tamburello”, batendo no muro com uma velocidade de 216 Km/h. No choque com o muro a roda dianteira direita se solta do carro indo em direção ao capacete de Senna, logo um dos braços da suspensão perfurou a viseira assim causando fratura múltipla na caixa craniana.

Após um breve resumo do acidente foi analisada a coluna de direção que se rompeu ocasionando o fatal acidente, que dias antes da corrida Senna reclamou da posição de dirigir o carro, onde a direção estava um pouco para frente, desta forma a equipe de engenheiros determinaram colocar uma emenda conseguindo ajustar o volante na posição ideal. Logo os mecânicos serraram a barra original em três pedaços, eliminando o pedaço central e soldaram outro segmento mais fino, feito de uma liga metálica aeronáutica denominada En14.



Figura 1: Volante com a coluna de direção quebrada.

(Fonte: adaptada de Ikaro dos Reis Riva, 2004)

Os peritos apuram que esta liga metálica En14, havia sido usada antes e apresentava sinais extensos de fadiga e não era adequada aos esforços submetidos, outra análise que não deveria fazer emendas em materiais que estão sendo submetidos à torção. Logo analisaram que a coluna se quebrou antes da colisão com o muro, evidenciando uma ruptura por fadiga, onde evidenciaram sinais característicos como estrias, ou seja, as marcas surgem a cada ciclo solicitado, isso quer dizer que o material foi submetido as dois tipo de esforço a flexão e torção. A torção quando ele manobrava o volante e a flexão quando se produzia trepidação e vibração no carro.

Porem a fadiga poderia ser detectado com antecedência, visto que os carros de fórmula 1 era submetido a testes para se detectar fadiga de material após cada termino de corrida. Um dos exames realizados é o magnetoscopia, porém se aplica em componentes da suspensão, dificilmente passaria na coluna de direção, outra opção era examinar o carro todo com equipamento de ultrassom, utilizado na suspeita de fadiga de matérias em aviões (RIVA, 2004).

As imagens abaixo mostra a barra de direção no local da quebra por fadiga, logo se faz a necessário o conhecimento dos estágios da fadiga para avaliar um caso como esse.

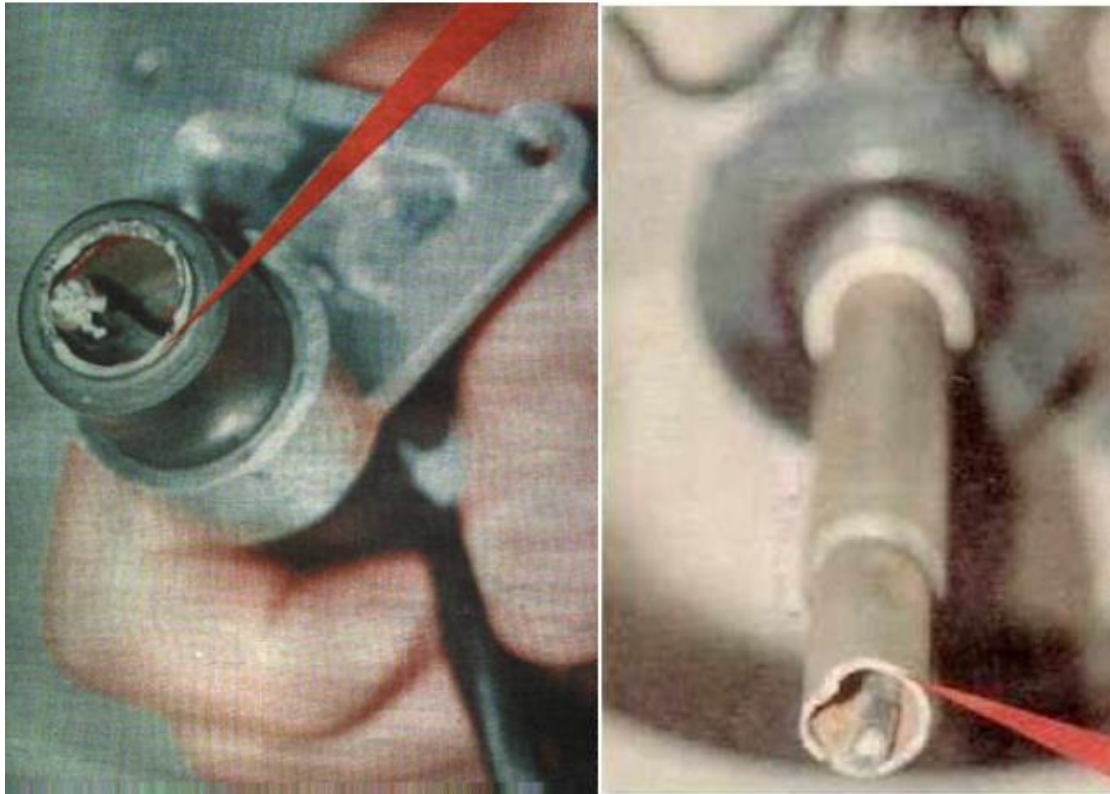


Figura 2: Barra de direção local da quebra.

(Fonte: adaptada de Ikaro dos Reis Rivas, 2004)

2.3 ESTÁGIOS DA FADIGA

De acordo com Guimarães (2009), as falhas por fadiga têm aparência similar às de uma fratura frágil, uma vez que as superfícies de fratura são planas e perpendiculares ao eixo de tensão, com ausência do fenômeno da estricção.

As características de uma fratura frágil estática são distintas de uma falha por fadiga. Por essa razão, surgem os estágios de desenvolvimento de falha, isto é, os estágios da fadiga.

Segundo Shigley, Mischke e Budynas (2005), são três os estágios:

- i) estágio I, com o início da trinca;
- ii) estágio II, com a propagação da trinca;
- iii) estágio III, com a ruptura repentina e instável da trinca, conforme Figura 1.

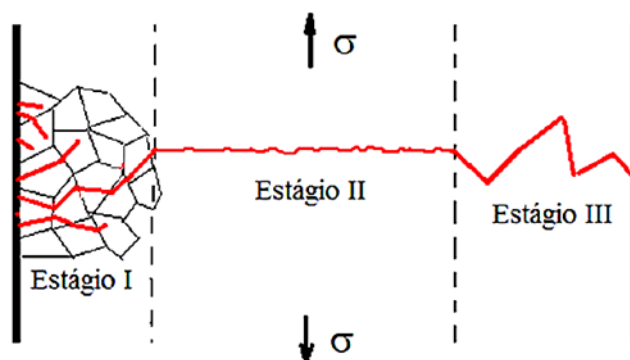


Figura 3: Etapas da propagação de trinca por fadiga

(Fonte: adaptada de Millela, 2013)

No estágio I, em uma superfície que segue um plano de deslizamento orientado na direção do carregamento, iniciam-se microtrincas, as quais são causadas pela deformação plástica com propagação cristalográfica. Consoante Millela (2013), normalmente elas ocorrem na região de maior concentração de tensão, passando por dois a cinco grãos pela origem.

No estágio II, um dos grandes causadores do crescimento da trinca é a tensão por tração que forma fraturas em sua superfície, propagando-se ao longo de planos normais; sua tendência é ir em direção da máxima tensão de tração (NORTON, 2002; ROSA, 2002).

No estágio III, devido ao crescimento da trinca, ocorre uma ruptura repentina. Em seu ciclo final, em consequência das constantes aplicações de cargas e do aumento da intensidade de tensão na extremidade da trinca, até o alcance do nível de tenacidade da fratura no material, o resultado é uma fratura rápida. Em seguida, de forma instantânea, ocorre uma falha repentina, próxima ao cliço de tensão de tração (BRANDÃO, 2013; NORTON, 2002).

Tendo em vista a análise da propagação de trincas em seus diferentes estágios, desenvolveu-se a mecânica da fratura.

2.4 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA (MFLE)

A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) é uma metodologia que visa avaliar a propagação de trincas estruturais. Segundo Anderson (2005), é aplicada em situações em que não há deformação plástica significativa durante a fratura. Complementarmente, Bannantine, Comer e Handrock (1989) afirmam que essa metodologia se desenvolve por meio das seguintes hipóteses:

H1 - existência de uma trinca;

H2 - material elástico linear isotrópico e homogêneo;

H3 - pequenas deformações;

H4 - estado plano de tensões;

H5 - modos de carregamento.

Conforme Schijve (2009), a abertura de uma trinca se dá através de três modos específicos, os quais podem ser observados na Figura 2.

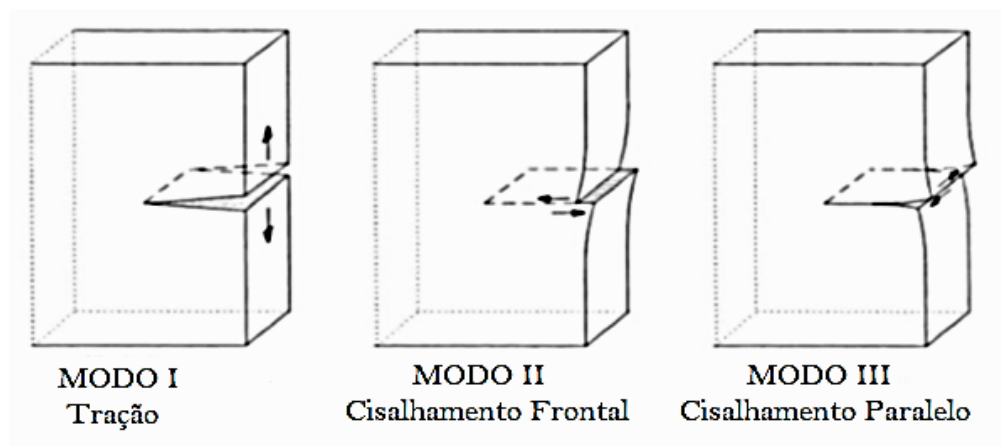


Figura 4: Modos de abertura de trinca

(Fonte: adaptada de Schijve, 2009)

O modo I se refere à tensão de tração e tem como característica principal o deslocamento local pelos planos $x-y$ e $x-z$. Já o modo II diz respeito a uma tensão de cisalhamento em um plano normal da trinca, por meio do qual surge a aresta frontal da trinca e um deslocamento no plano $x-y$ e antissimétrico no plano $x-z$. Distintamente, o modo III corresponde às superfícies da trinca que deslizam paralelamente à aresta frontal, na qual os deslocamentos do plano são antissimétricos em $x-y$ e $x-z$.

Com base nos três modos expostos, infere-se que os deslocamentos das trincas se dão através dos modelos de propagação das mesmas nos respectivos planos.

2.5 MODELOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

O crescimento de uma trinca acontece quando ocorre um Carregamento de Amplitude de Tensão Constante (CATC), desconsiderando-se o histórico do carregamento.

Vários modelos são capazes de representar a evolução de uma trinca, porém esses modelos variam de acordo com a propagação de trincas e com o número de parâmetros para os ajustes de dados que são experimentais da curva, apresentado pela Lei da Evolução.

2.5.1 Modelo de Paris-Erdogan

De certa forma, cada modelo tem suas especificações e alguns são indicados para uma determinada região do diagrama. O modelo de Paris-Erdogan (1963) é expresso pelo PVI apresentado na sequência, de acordo com a Equação 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1[N_0, N_1]; \mathbb{R}^+ \quad \text{tal que:} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C_p (\sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma)^{m_p}, \quad \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0. \end{array} \right. \quad (1)$$

onde:

m_p : coeficiente e o expoente da Lei de Paris

N : número de ciclos

a_0 : tamanho inicial da trinca

$\Delta \sigma$: variação da intensidade tensão

Essa equação representa a região II do diagrama representado na Figura 3. A respectiva lei descreve o comportamento da referida região, sem considerar o efeito da tensão média.

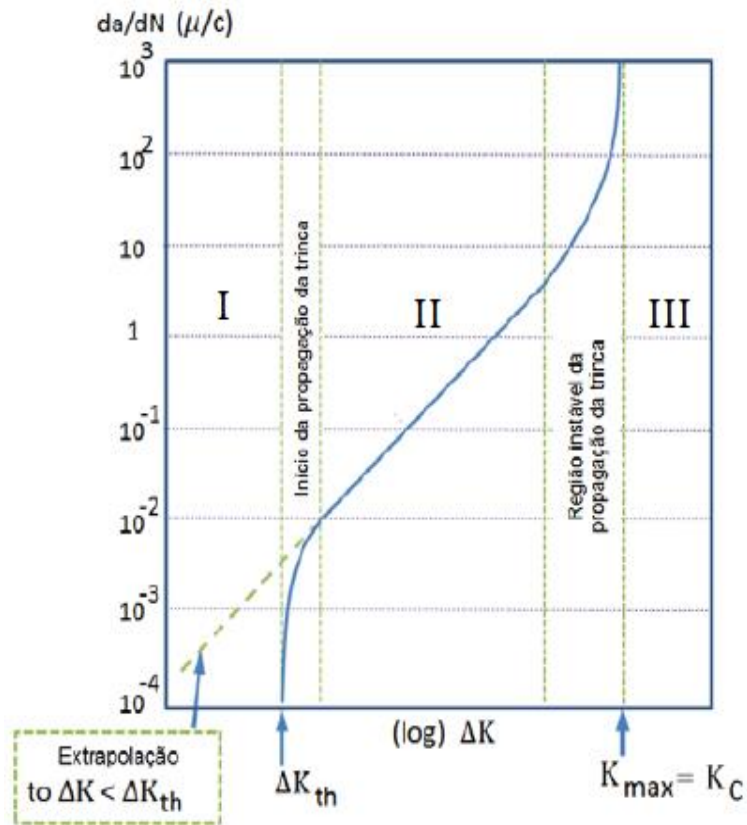


Figura 5: Regiões da propagação de trincas

(Fonte: adaptada de Schijve, 2009)

2.5.2 Modelo de Walker

Com uma modificação do modelo de Paris-Erdogan ao considerar a razão das tensões máximas e mínimas, surge o modelo de Walker (1970, *apud* BEDEN *et al.* 2009), o qual descreve a segunda região do diagrama $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$. Como ilustra a Figura 3, segue a Equação 2, correspondente ao modelo de Walker:

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1([N_0, N_1]: \mathbb{R}^+), & \text{tal que:} \\ \frac{da}{dN} = C_w [(1-R)^{Y_w-1} \Delta K]^{m_w}, & \forall N \in (N_0, N_1) \\ a(N_0) = a_0 \end{cases} \quad (2)$$

onde:

C_w, m_w e Y_w : parâmetros do modelo de Walker

ΔK : variação do fator intensidade de tensão

2.5.3 Modelo numérico pelo método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4)

Este método consiste em uma técnica de resolução de forma simples do PVI proposto. Em conformidade com Boyce (2006), em virtude de facilitar a solução com passos simples e integrar o método de Euler implícito, sua principal vantagem é a precisão do erro de truncamento encontrado na ordem h^4 . Desse modo, o método de RK4 de 4 estágios é o mais utilizado (ASCHER e PETZOLD, 1998).

O método RK4 é comparado a um polinômio de grau 4 (comparação feita com um polinômio de Taylor). Dessa forma, o cálculo da derivada é eliminado através de uma avaliação da função f em cada iteração, o que justifica a importância de se ter conhecimento do teorema de Taylor com resto de Lagrange, conforme descrito nas Equações 3 e 4.

$x : [t_0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a função de classe C^{n-1} , n – vezes derivável no aberto (t_0, b) , tal que:

$$x(b) = x(t_0) - x'(t_0)(b - t_0) + \dots + \frac{(b - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} x^{(n-1)}(t_0) + \frac{(b - t_0)^n}{n!} x^{(n)}(\xi) \quad (3)$$

onde:

$b = t_0 + h$: equivalente a dizer que existe $\theta \in (0,1)$, tal que:

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} x^{(n-1)}(t_0) + \frac{h^n}{n!} x^{(n)}(t_0 + \theta h). \quad (4)$$

2.5.4 Metodologia *Fast Crack Bounds* (FCB)

Segundo Ávila Jr. e Santos (2015), a metodologia FCB estabelece cotas superiores e inferiores que envelopam a solução do PVI do modelo de propagação de trincas do tipo CATC, formulado de acordo com a Equação 5:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } a \in C^1, \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = h(\alpha, \Delta K), \forall N \in (N_0, N_1), \\ a(N_0) = a_0 \end{cases} \quad (5)$$

onde:

desenvolvem-se hipóteses que, de acordo com Santos (2015), garantem a regularidade suficiente para que a função tamanho da trinca seja expandida, como a série de Taylor com resto de Lagrange prévia, conforme Equação 6:

$$a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N] \quad (6)$$

A Equação 6 sugere que, a partir da série de Taylor, retendo o termo até segunda ordem com resto de Lagrange, em que seja necessário utilizar as hipóteses com majorações adequadas, as cotas são obtidas em conformidade com a Equação 7 (ÁVILA JR., SANTOS e BECK, 2016):

$$\underline{a}(N) \leq a(N) \leq \bar{a}(N), \forall N \in [N_0, N]. \quad (7)$$

onde:

$\underline{a}(N)$: cota inferior

$a(N)$: função tamanho da trinca

$\bar{a}(N)$: cota superior

2.5.5 Simulação de Monte Carlo (SMC)

Esta é uma técnica matemática computadorizada que leva em conta o risco em análises quantitativas e tomadas de decisões. Publicado inicialmente por John Von Neumann e Stanislaw Ulam (1947), em um artigo intitulado *Monte Carlo Method*, o método foi oficializado em 1949.

A simulação pode ser descrita como um ensaio estatístico que utiliza números aleatórios em sequência, desenvolvendo, assim, amostragens. Nesse aspecto, a SMC é vista como método numérico universal que possibilita a resolução de problemas por amostragem (LOESH, 2009).

Segundo Elishakoff (1999), a SMC baseia-se em simulações de amostras e, por essa razão, o método desenvolve as seguintes etapas:

- i) simulação da função variável aleatória;
- ii) solução do problema determinístico;
- iii) análise estatística dos resultados.

Lopez e Ávila Jr. (2015) corroboram, afirmando que a aproximação numérica das realizações do processo descreve a propagação da trinca avaliada pelo método de RK4.

3 METODOLOGIA

A pesquisa foi desenvolvida em três etapas específicas e, ao mesmo tempo, inter-relacionadas.

Na primeira etapa, na qual a metodologia *Fast Crack Bounds* foi aplicada ao modelo de Walker, foram elaboradas as formulações matemáticas, visando à busca pela definição das cotas superiores e inferiores para a evolução de trinca do respectivo modelo. Desse modo, a partir da utilização do método FCB, as cotas foram estabelecidas mediante a série de Taylor de segunda ordem com resto de Lagrange.

Na segunda etapa, desenvolveu-se o algoritmo, bem como a implementação computacional, haja vista que os métodos explicitados neste estudo, isto é, SMC, RK4, FCB e o modelo de propagação de trincas de Walker foram devidamente implementados através de algoritmos formulados pelo software MatLab. Assim sendo, mediante o uso do exemplo clássico “Placa com largura finita e trinca na região central”, obteve-se como resultado um algoritmo que fornece soluções numéricas. Importante salientar que tais soluções foram coletadas a partir do método RK4, com uma estimativa das cotas.

A terceira etapa correspondeu aos resultados esperados. Desenvolvidos no MatLab, os resultados geraram um código matemático. Para finalização dessa etapa, procedeu-se a

avaliação das cotas por meio de dados referentes ao aço ferrítico, apresentados por Castro e Meggiolaro (2009).

3.1 METODOLOGIA *FAST CRACK BOUNDS* APLICADA AO MODELO DE WALKER

Segundo Ávila Jr. e Santos (2015), a função tamanho da trinca estabelece cotas superiores e inferiores, por meio das quais, de certa forma, envelopa-se a solução do PVI do modelo de propagação de trincas de Walker. É, pois, por intermédio do PVI que os modelos

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1[[N_0, N_1]; \mathbb{R}^+], \text{ tal que:} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = c_w \left[(1 - R)^{r_w - 1} \left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right) \right]^{m_w}, \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0. \end{cases} \quad (8)$$

matemáticos para a evolução de trincas são formulados, como demonstra a Equação 8:

Importante destacar que as características das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não são lineares nem autônomas. Nesse sentido, conforme especifica Santos (2015), ao se aplicar a expansão em série de Taylor com resto de Lagrange, são obtidas as seguintes hipóteses:

$$H1: a(s) \leq a(t), s \leq t \in [N_0, N];$$

$$H2: f \in C^1(\mathbb{R});$$

$$H3: 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1];$$

$$H4: f'(a_0) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1];$$

$$H5: m \geq 1.$$

Do exposto, depreende-se que, pelo fato de assumir um carregamento de tensão constante (H1), a função correção que assegura o fator de intensidade de tensão é contínua (H2), assim como a função geométrica é monótona não decrescente (H3). De igual modo, enquanto na hipótese H4 verifica-se que a derivada da função geométrica equivale a uma função monótona não decrescente, a hipótese H5 determina o valor, para que o modelo de Walker seja válido.

Relevante considerar ainda que essas hipóteses formam as bases para a definição da proposição, uma vez que esta determina as cotas para a função tamanho da trinca.

3.2 TEOREMA APLICADO AO MÉTODO FCB

Caso as funções $f(\cdot)$ e $\Delta(\cdot)$ atendam às hipóteses H1, H2, H3, H4 e H5 e a $a^* \in [a_0, a_1]$, as cotas superiores e inferiores são consideradas válidas, conforme Equação 9:

$$\begin{cases} a(N) - a_0 \leq C_w \left\{ \begin{aligned} &[(1-R)^{\gamma_w-1} \Delta K(a_0)]^{m_w} + \left(\frac{m_w C_w}{2}\right) [(1-R)^{\gamma_w-1} \Delta K(a^*)]^{2m_w} \\ &x \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f}\right)(a^*) \right] (N - N_0) \end{aligned} \right\} (N - N_0); \quad (9) \\ (N) - a_0 \geq C_w [(1-R)^{\gamma_w-1} \Delta K(a_0)]^{m_w} \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} m_w C_w [(1-R)^{\gamma_w-1} \Delta K(a_0)]^{m_w} \\ &x \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f}\right)(a_0) \right] (N - N_0) \end{aligned} \right\} (N - N_0); \end{cases}$$

$$\forall N \in [N_0, N_1].$$

De acordo com Santos (2015), a prova das hipóteses H2, H3 e H4, por meio da série de Taylor de segunda ordem com resto de Lagrange, é o descrito na Equação 10:

$$\begin{aligned} a(N) &= a_0(N_0) + \left(\frac{da}{dN}(N_0) \right) (N - N_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right) (N - N_0)^2, \text{ com } \eta \\ &\in [N_0, N] \end{aligned} \quad (10)$$

Por intermédio das hipóteses H2, H3 e H4, as desigualdades seguintes podem ser representadas como consta na Equação 11:

$$a(s) \leq a(t), s \leq t \in [N - N_0] \rightarrow (a(s))^m \leq (a(t))^m. \quad (11)$$

Nas hipóteses H2, H3 e H4 obtém-se o descrito na Equação 12:

$$(f(s))^m \leq (f(t))^m \rightarrow \left(a^{\frac{1}{2}}f\right)^m(s) \leq \left(a^{\frac{1}{2}}f\right)^m(t), s \leq t \in [N_0, N] \quad (12)$$

Dessa forma, para as referidas hipóteses, conclui-se o exposto na Equação 13:

$$(\Delta K)^m(a(s)) \leq (\Delta K)^m(a(t)) \quad (13)$$

Não obstante, sendo $C > 0$, obtém-se o descrito na Equação 14:

$$\frac{da}{dN}(s) \leq \frac{da}{dN}(t), s \leq t \in [N_0, N] \quad (14)$$

Já a segunda derivada das respectivas hipóteses é o que consta na Equação 15:

$$\begin{aligned} \frac{d^2a}{dN^2}(a(N)) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) \\ &= mC^2[(1-R)^{\gamma-1}\Delta K]^{2m} \left[\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f'(a)} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Fazendo a substituição da Equação 15 pela Equação 10, o tamanho da trinca passa a ser o descrito na Equação 16:

$$\begin{aligned} a(N) - a_0(N_0) &= C[(1-R)^{\gamma-1}\Delta K(a_0)]^m(N - N_0) \\ &+ \frac{1}{2}mC^2[(1-R)^{\gamma-1}\Delta K(a(\eta))]^{2m} \left[\frac{1}{2(a(\eta))} + \left(\frac{f'}{f}\right)(a(\eta)) \right] (N - N_0)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

com $\eta \in [N_0, N]$.

Logo, as cotas superior e inferior são obtidas por meio da Equação 16.

3.3 DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Com a utilização do software MatLab, o ambiente computacional foi desenvolvido por meio de algoritmos e códigos matemáticos, procurando implementar os métodos SMC, RK4 e FCB no modelo de propagação de trincas de Walker em congruência com o exemplo clássico da literatura técnica.

O resultado dessa implementação computacional, no ambiente do software MatLab, é a geração de um algoritmo que desempenha um confronto entre as soluções numéricas obtidas pelo método RK4 e os estimados pelas cotas superiores e inferiores.

3.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para alcançar os resultados da solução numérica aproximada ao modelo de Walker, com o intento de encontrar os valores das cotas superior e inferior para as funções do fator de intensidade de tensão, utilizou-se como base os estudos desenvolvidos por Bannantine, Comer e Handrock (1989).

3.4.1 Exemplo 1: Placa infinita com trinca central

O exemplo 1 é uma placa com largura infinita e uma trinca central. Seu tamanho inicial, sendo solicitado um carregamento de tração, é a_0 , conforme Figura 4.

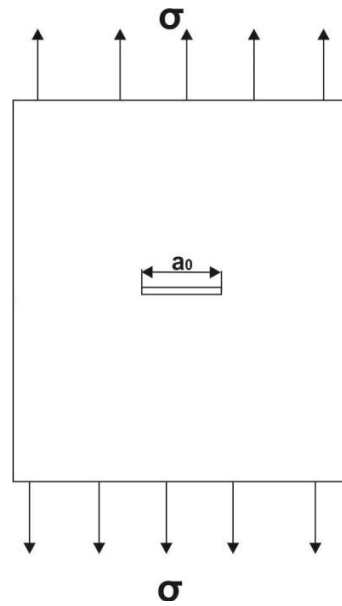


Figura 6: Placa infinita com trinca central

(Fonte: BANNANTINE, COMER e HANDROCK, 1989)

A função correção do fator de intensidade de tensão é representada pela Equação 17:

$$f(a) = 1. \quad (17)$$

3.4.2 Exemplo 2: Placa finita com trinca central

O exemplo 2 é uma placa finita, com largura b e trinca central. Seu tamanho inicial, solicitando-se um carregamento de tração, é a_0 , conforme Figura 5.

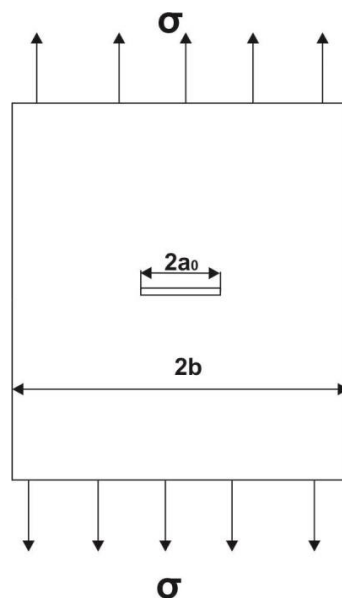


Figura 7: Placa finita com trinca central

(Fonte: BANNANTINE, COMER e HANDROCK, 1989)

A função correção do fator intensidade de tensão dessa placa é representada pela Equação 18:

$$f(a) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \quad (18)$$

3.4.3 Exemplo 3: Placa finita com trinca na aresta

Por último, o exemplo 3 é uma placa finita, com largura b e com uma trinca em sua aresta. Seu tamanho inicial, sendo solicitada sob um carregamento de tração, é a_0 , conforme Figura 6.

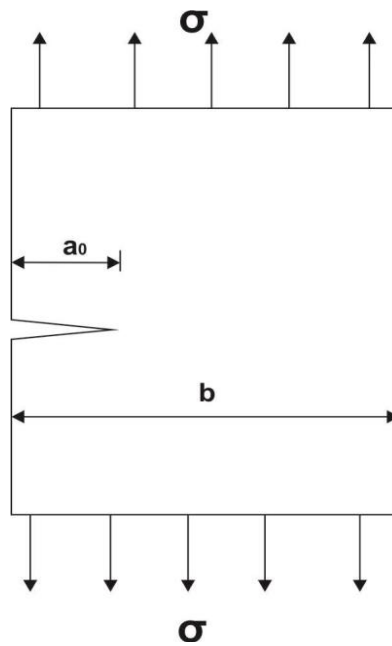


Figura 8: Placa finita com trinca na aresta

(Fonte: BANNANTINE, COMER e HANDROCK, 1989)

A função correção do fator intensidade de tensão é representada pela Equação 19, a saber:

$$f(a) = 1.122 - 0.231\left(\frac{a}{b}\right) + 10.55\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad (19)$$

3.5 DESEMPENHO DAS COTAS SUPERIOR E INFERIOR

Para a avaliação de desempenho das cotas dos três exemplos citados, são utilizados os dados indicados por Barsom e Rolf (1999) e Castro e Meggiolaro (2009), aplicados aos aços ferríticos para valores de R iguais a zero, a saber: $a_0 = 0,001m$, $b = 0,1m$, $\Delta\sigma = 70Mpa$, e $N = 900.000$ ciclos.

O Quadro 1 mostra os parâmetros do modelo de Walker em comparação ao modelo de Paris-Erdogan, pois cada modelo apresenta um parâmetro diferente.

Quadro 1: Parâmetros para modelo de propagação de trincas de Walker

Modelo	C(m/ciclo)	γ	m	R
Walker	$7 \cdot 10^{-12}$	1	2	0
Paris-Erdogan	$6,9 \cdot 10^{-12}$	-	3	-

(Fonte: elaborado pelo autor)

Nas equações para cota superior, observou-se que a Equação 9 corresponde à função parâmetro α^* (tamanho da trinca). Logo, atribuiu-se a α^* um valor específico, com o mínimo possível de desvio.

Assim sendo, para avaliar o desempenho das cotas superior e inferior, definiu-se a função desvio relativo: $\delta_{inferior, superior}: \{0, 1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$, representada pela Equação 20:

$$\delta_{inferior, superior}(N_k) = 100 \left(\frac{a_{cs, ci} - a_{RK4}}{a_{RK4}} \right) (N_k) \quad [\%], \forall N_k \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (20)$$

Importante enfatizar a necessidade de comparativo entre a solução numérica aproximada pelo método RK4 e as cotas nas seguintes ordens:

- i) gráficos entre números de ciclos e tamanho da trinca;
- ii) desvio relativo entre as cotas superior e inferior;
- iii) razão dos tempos para a computação da solução numérica via RK4, bem como das cotas.

3.6 APLICAÇÃO DA METODOLOGIA A UM PROBLEMA DE ENGENHARIA

Na prática, a metodologia permite ao engenheiro a tomada de decisão sobre o uso, ou não, de um determinado método. Nesse sentido, é pertinente considerar que a metodologia se baseia na obtenção de uma aproximação com qualquer função que dependa do comportamento das cotas, sem necessariamente ter um conhecimento da solução da Lei de Evolução da Trinca, obtida por meio de algum método matemático.

Sob tal premissa, as funções utilizadas foram as de média aritmética e média geométrica das cotas superior e inferior. Já os valores foram obtidos através da solução numérica aproximada pelo método RK4.

A função média aritmética equivale à Equação 21:

$$\mu_{ar} = \frac{(a_{CS} + a_{CI})}{2} \quad (21)$$

Já a função média geométrica corresponde à Equação 22:

$$\mu_{geo} = \sqrt{a_{CS} * a_{CI}} \quad (22)$$

Quanto ao erro relativo, este pode ser obtido pelas médias calculadas nas cotas superior e inferior. Para a relação entre essas cotas e o método numérico aproximado de RK4, destaca-se a Equação 23:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\mu \text{ geométrica}} = \frac{(\sqrt{a_{CS} * a_{CI}} - a_{RK4})}{a_{RK4}} 100 \\ \varepsilon_{\mu \text{ aritmética}} = \frac{\left[\frac{(a_{CS} + a_{CI})}{2} - a_{RK4} \right]}{a_{RK4}} 100 \end{cases} \quad (23)$$

3.7 RESULTADOS DO MODELO DE WALKER

Para as simulações realizadas no modelo de Walker via metodologia FCB, determinou-se como parâmetro $a^* = 1,45a_0$. À vista disso, os resultados configuram os exemplos ilustrados nas Figuras 7, 8 e 9, apresentadas na sequência deste estudo.

3.7.1 Exemplo 1: Trinca central em placa infinita

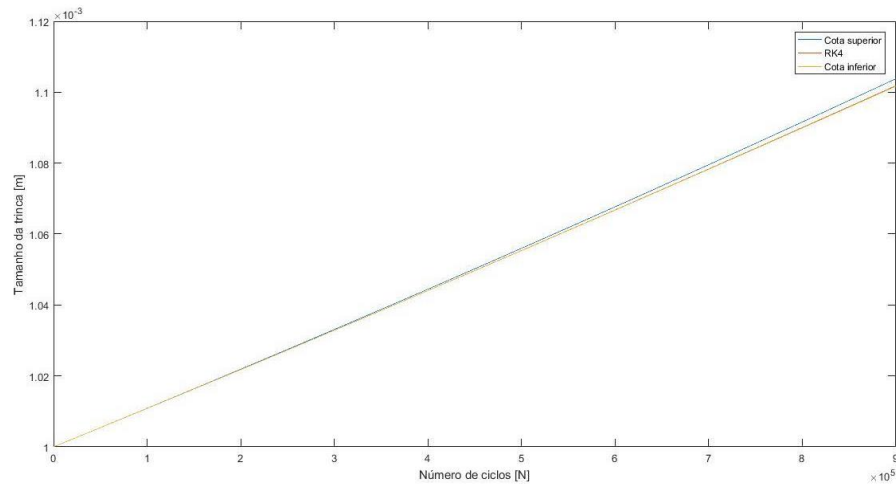


Figura 9: Função cotas com a solução numérica aproximada

(Fonte: elaborada pelo autor)

A seguir, a mesma figura apresenta-se de forma ampliada, para que se possa observar como as cotas envelopam a solução numérica de RK4, demonstrando a eficácia da metodologia FCB.

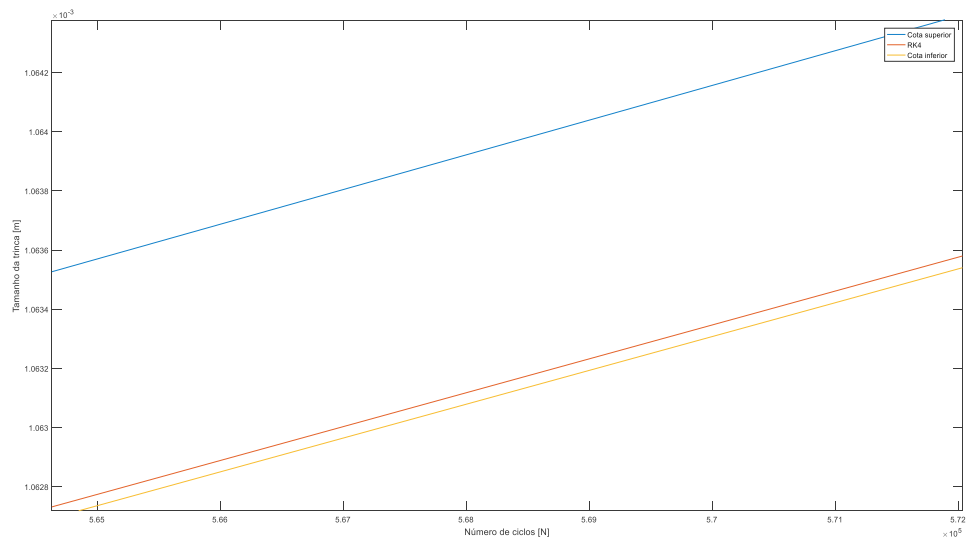


Figura 10: Imagem 7 ampliada

(Fonte: elaborada pelo autor)

Nas Figuras 7 e 8, identifica-se que as cotas superior e inferior não apresentam grandes desvios em seus valores numéricos. Assim sendo, apresentam um bom desempenho quando comparadas à solução numérica aproximada do método RK4. Essa aproximação numérica

pode ser observada e quantificada de acordo com a exposição da Figura 9 a qual se refere à função desvio relativo das cotas superior e inferior.

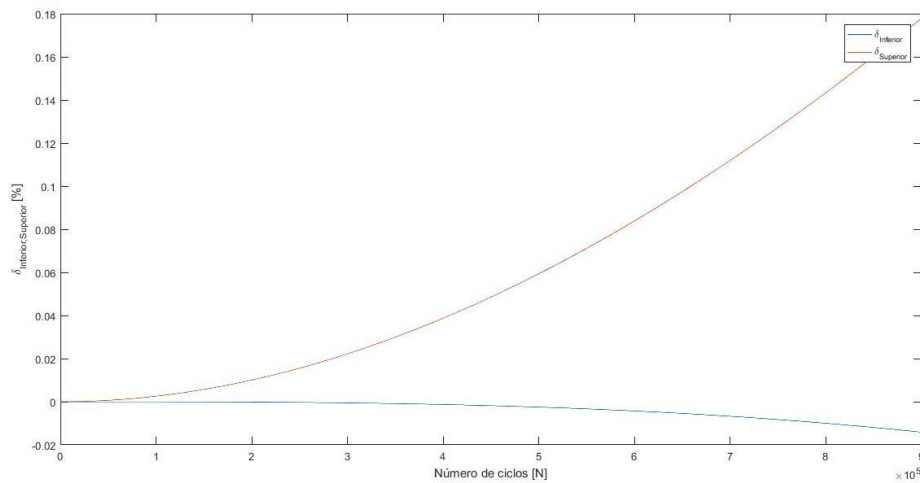


Figura 11: Desvio relativo para as cotas superior e inferior

(Fonte: elaborada pelo autor)

Na Figura 9, verifica-se que o desvio relativo máximo para a cota superior foi de 0,176% aproximadamente, enquanto para cota inferior, o valor mínimo foi próximo a 0,016%. Desse modo, a cota superior apresentou o maior desvio relativo para 900.000 ciclos.

O Quadro 2 mostra o tempo computacional aproximado da solução de RK4 e das cotas superior e inferior, considerando que as cotas são 155 vezes mais eficientes computacionalmente se comparadas ao método RK4 para o exemplo 1.

Quadro 2: Tempo aproximado em segundos das cotas e RK4 (exemplo 1)

RK4	Cotas superior / inferior	Eficiência computacional (razão entre RK4 / cotas)
2.0735813	0.0133268	155

(Fonte: elaborado pelo autor)

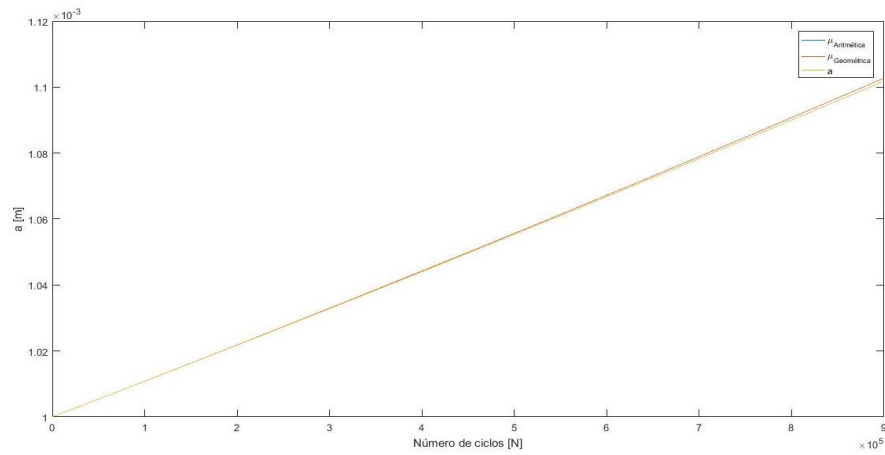


Figura 12: Função erro relativo da média aritmética das cotas

(Fonte: elaborada pelo autor)

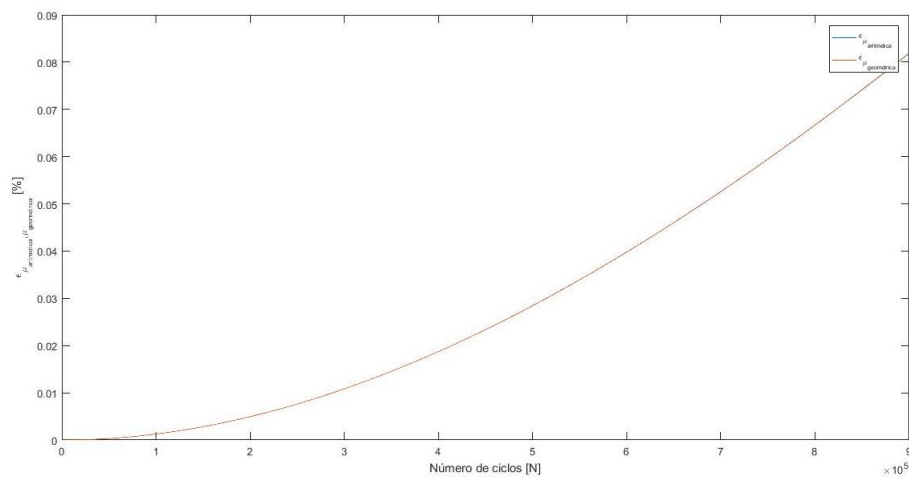


Figura 13: Desvio relativo do erro da média aritmética das cotas

(Fonte: elaborada pelo autor)

Nas Figuras 10 e 11, o erro relativo não apresentou grandes desvios, tendo em vista que o erro relativo máximo foi de 0,082% para 900.000 ciclos. Tal resultado representa que as cotas envelopam, de forma estreita e eficaz, a solução obtida pelo método numérico RK4.

3.7.2 Exemplo 2: Trinca na aresta em placa finita

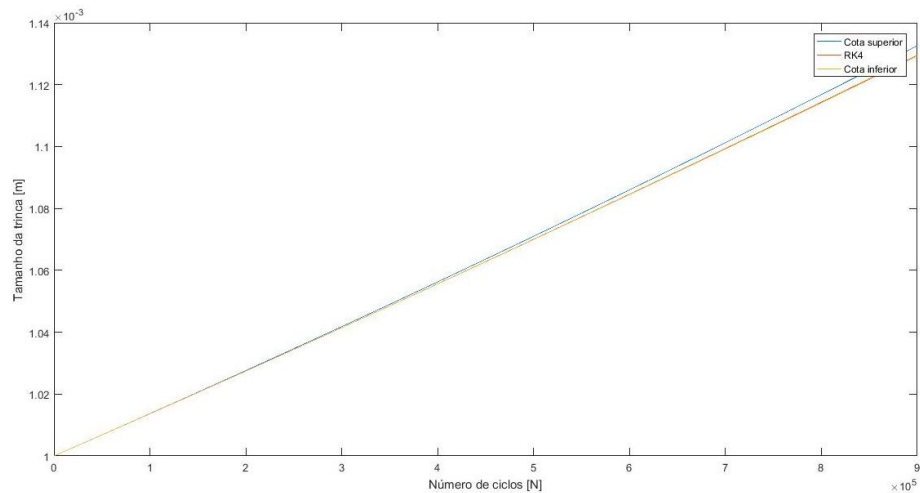


Figura 14: Função cotas superior e inferior com a solução numérica aproximada
(Fonte: elaborada pelo autor)

De acordo com a Figura 12, as cotas superior e inferior estão de acordo com a metodologia, uma vez que não apresentaram grandes desvios em seus valores numéricos. Logo, evidenciam um bom desempenho.

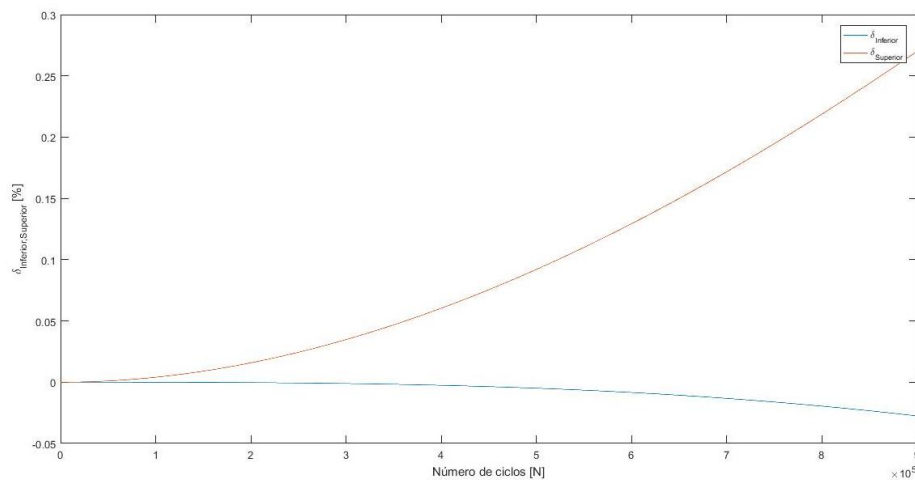


Figura 15: Desvio relativo para as cotas superior e inferior
(Fonte: elaborada pelo autor)

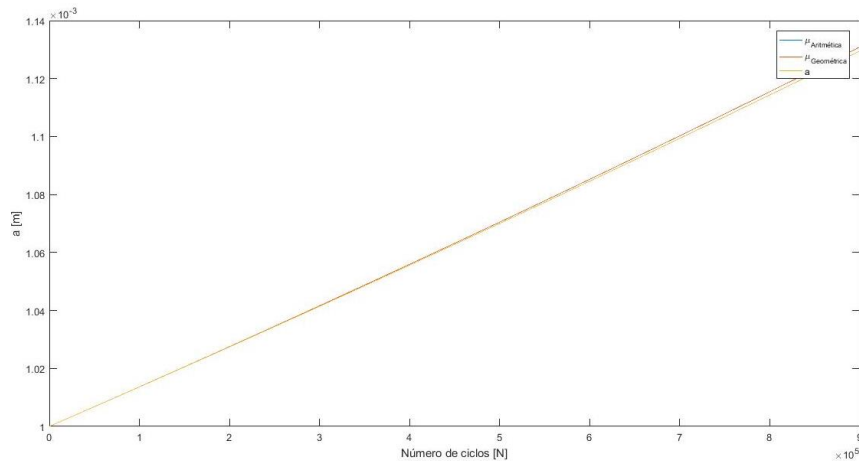
Na Figura 13, identifica-se o desvio relativo máximo para a cota superior que foi de 0,27% aproximadamente. Já para a cota inferior, o valor mínimo foi próximo a -0,025%, tendo, assim, a cota superior o maior desvio para 900.000 ciclos.

O Quadro 3 mostra o tempo aproximado da solução de RK4 e das cotas superior e inferior, considerando as cotas 283 vezes mais eficazes computacionalmente se comparadas ao método RK4 para o exemplo 2 de trinca na aresta em placa finita.

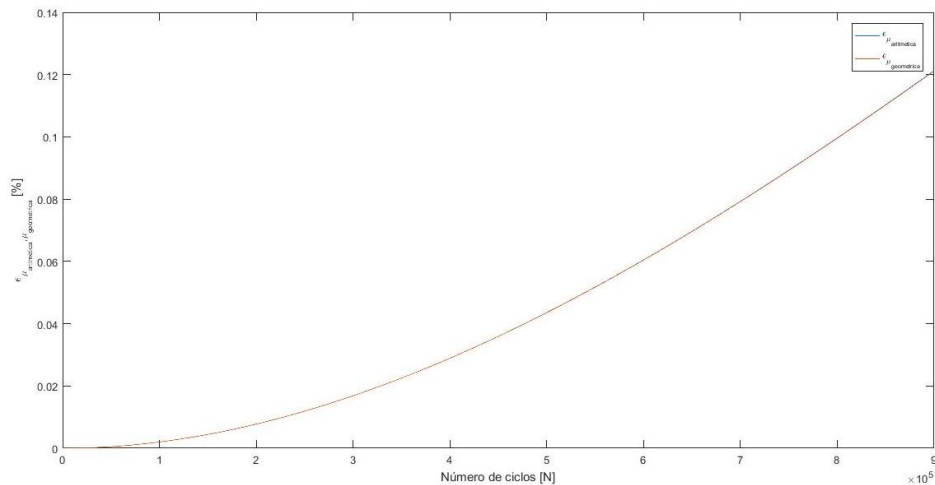
Quadro 3: Tempo aproximado em segundos das cotas e RK4 (exemplo 2)

RK4	Cotas superior / inferior	Eficiência computacional (razão entre RK4 / cotas)
4.8018739	0.0169699	283

(Fonte: elaborado pelo autor)

**Figura 16:** Função erro relativo da média aritmética das cotas

(Fonte: elaborada pelo autor)

**Figura 17:** Desvio relativo do erro da média aritmética das cotas

(Fonte: elaborada pelo autor)

Nas Figuras 14 e 15, verifica-se o erro relativo da média aritmética das cotas sem grandes desvios, haja vista que o erro relativo foi, no máximo, de 0,122% para 900.000 ciclos. Isso comprova que as cotas envelopam a solução numérica de forma estreita e eficaz.

3.7.3 Exemplo 3: Trinca central em placa finita

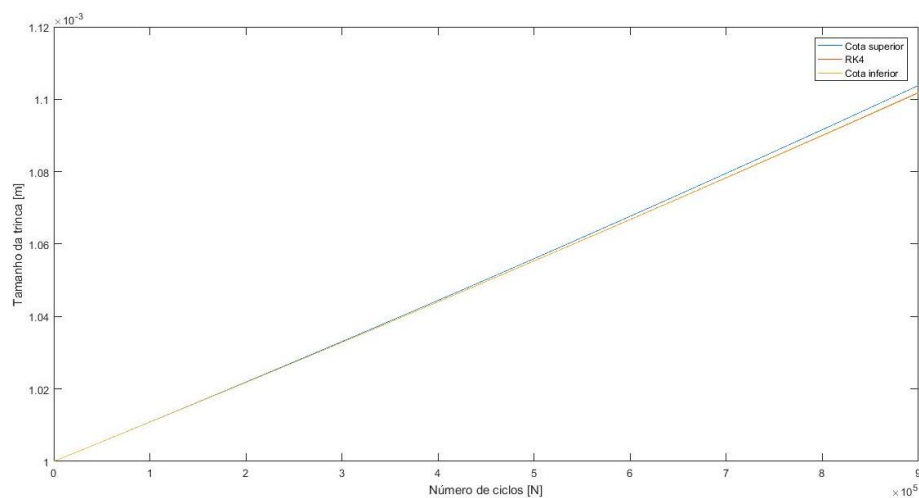


Figura 18: Função cotas superior e inferior com a solução numérica aproximada

(Fonte: elaborada pelo autor)

De acordo com a Figura 16, as cotas superior e inferior aproximam-se da solução de RK4, demonstrando, com isso, um bom desempenho em seus valores numéricos. Em razão da aproximação numérica das cotas, a função desvio relativo pode, portanto, ser observada e quantificada.

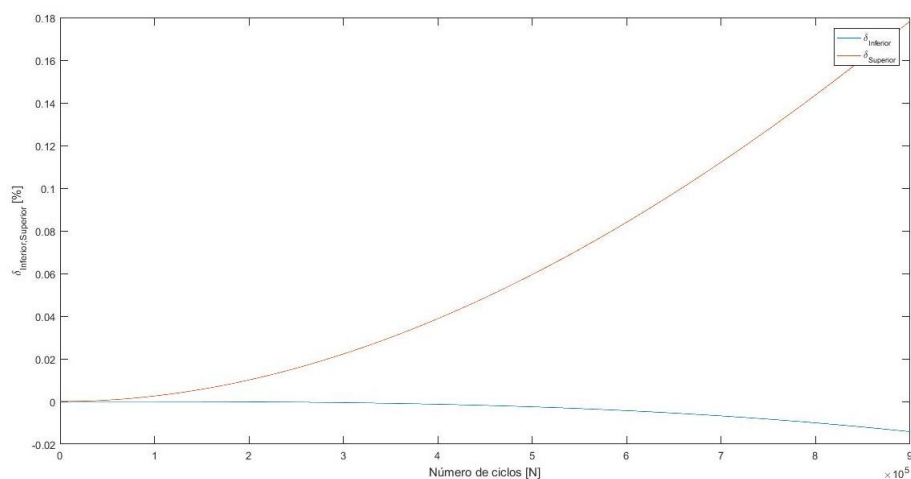


Figura 19: Desvio relativo para as cotas superior e inferior

(Fonte: elaborada pelo autor)

Conforme a Figura 17, o desvio relativo máximo para a cota superior foi de 0,178% aproximadamente. Já para a cota inferior, o valor mínimo aproximado foi de -0,016%, tendo, assim, a cota superior o maior desvio para 900.000 ciclos.

O Quadro 4 mostra o tempo computacional aproximado da solução de RK4 e das cotas superior e inferior. Comparadas ao método RK4 para o exemplo 3 de trinca central em placa finita, as cotas são 159 vezes mais eficientes.

Quadro 4: Tempo aproximado em segundos das cotas e RK4 (exemplo 3)

RK4	Cotas superior / inferior	Eficiência computacional (razão entre RK4 / cotas)
3.515655	0.0221025	159

(Fonte: elaborado pelo autor)

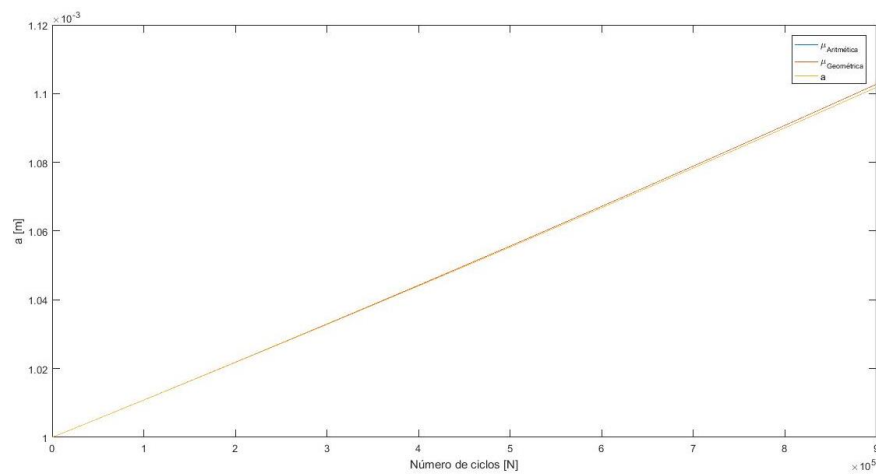


Figura 20: Função erro relativo da média aritmética das cotas

(Fonte: elaborada pelo autor)

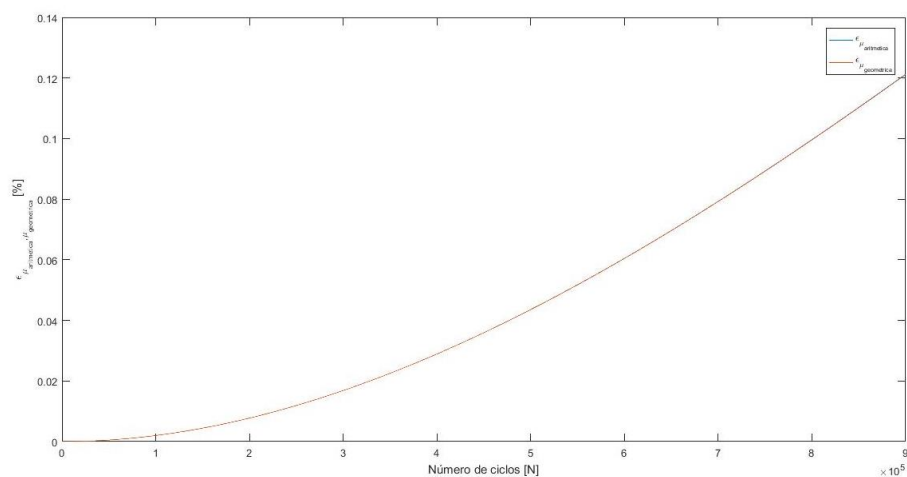


Figura 21: Desvio relativo do erro da média aritmética das cotas

(Fonte: elaborada pelo autor)

As Figuras 18 e 19 mostram o erro relativo sem grandes desvios. Ou seja, o erro foi de, no máximo, 0,122% para 900.000 ciclos. Isso posto, infere-se que as cotas envelopam, de forma estreita e com uma boa eficácia, a solução obtida pelo método RK4 para o exemplo 3.

3.8 SÍNTESE DOS RESULTADOS

De modo geral, os valores obtidos atendem à eficácia da metodologia FCB. No Quadro 5, nota-se que o tempo das cotas superior e inferior é muito menor em relação ao método RK4, analisando-se também a razão do tempo computacional. Os valores das médias aritmética e geométrica, comparando-se com as cotas e a solução numérica aproximada, têm valores muito próximos, o que comprova a eficiência da metodologia.

Quadro 5: Comparação dos resultados nos 3 exemplos

	Cota Superior	Cota inferior	Tempo* (RK4)	Tempo* (Cotas)	Razão (RK4/Cotas)
Exemplo 1	0,176%	-0,016%	2,0735813	0,0133268	155
Exemplo 2	0,270%	-0,025%	4,8018739	0,0169699	283
Exemplo 3	0,178%	-0,016%	3,515655	0,0221025	159

(Fonte: elaborado pelo autor)

Nota: *Tempo em segundos

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

À modo de conclusão, pode-se afirmar que, mediante o objetivo de analisar as funções de cotas superior e inferior para o modelo de propagação de trincas de Walker por meio da metodologia FCB, a solução numérica foi devidamente envelopada pelas referidas cotas. Ademais, foi possível estabelecer comparação entre o tempo computacional e o método RK4, bem como analisar o comportamento dessas cotas e seus desvios relativos, assim como conferir as funções de correção do fator intensidade e sua derivada entre α_0 e α^* .

Em virtude de as funções das cotas enveloparem a solução numérica aproximada, obtida pelo método de RK4, constata-se que a metodologia foi eficaz para os três exemplos clássicos, apresentando valores muito estreitos, o que comprova a eficiência das funções e das cotas, com um tempo computacional da metodologia FCB de 200.000 vezes menor ao obtido pelo RK4.

5 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Os conhecimentos obtidos a partir do desenvolvimento deste Trabalho de Conclusão de Curso podem ser consideravelmente ampliados, tendo em vista as seguintes recomendações:

- i. aplicar a metodologia em outros materiais metálicos, realizando os ensaios de fadiga em um laboratório para obtenção dos parâmetros de carregamento, como também do tamanho da trinca inicial;
- ii. empregar a mesma metodologia em estudos de carregamento, com amplitude de tensão variável;
- iii. utilizar a quantificação de incerteza para o mesmo modelo de propagação de trinca;
- iv. desenvolver estudo com outros modelos, a exemplo de Paris-Erdogan, Forman e Colliprient, comparando os resultados.

REFERÊNCIAS

- ASTM - AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM Designation E 1823: Standard Terminology Relating to Fatigue and Fracture Testing**. West Conshohocken, 2000, p. 1034.
- ANDERSON, T. L. A. **Fracture mechanics: fundamentals and applications**. 3. ed. New York: CRC, 2005.
- ASCHER, U. M. A.; PETZOLD, L. R. P.; **Computer methods for ordinary differential equations and differential - algebraic equations**. Philadelphia: SIAM, 1998.
- ÁVILA JÚNIOR, S. C. R.; SANTOS, R. V. Bounds for the propagation model of crack form. **International Journal of Sciences: basic and applied research**. v. 22, n. 2, p. 219-231, 2015.
- ÁVILA JÚNIOR, S. C. R.; SANTOS, R. V.; BECK, A. T. Analytical Bounds for Efficient Crack Growth Computation. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, p. 2312-2321, 2016.
- BANNANTINE, J. A. B.; COMER, J. J.; HANDROCK, J. L. **Fundamentals of metal fatigue analysis**. Prentice Hall, 1989.
- BARSOM J. M.; ROLF S. T. **Fracture and fatigue control in structures: applications of fracture mechanics**. 3. ed. Philadelphia: ASTM, 1999.
- BEDEN, S. M. *et al.* Review of fatigue crack propagation models for metallic components. **European Journal of Scientific Research**, 2009, p. 364-397.
- BOYCE, W. E. W.; DIPRIMA R. C. D. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- BRANDÃO, R. P. B. **Projeto mecânico de uma máquina de ensaio de fadiga por flexão rotativa**. 2013, 76 f. Monografia (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.
- CASTRO, J. T. P.; MEGGIOLARO, M. A. **Fadiga - técnicas e práticas de dimensionamento estrutural sob cargas reais de serviços. Propagação de trincas, efeitos térmicos e estocásticos**. Createspace Books, 2009.
- DIETER, G. E. D. **Metalurgia Mecânica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.
- ELISHAKOFF, I. E. **Probabilistic theory of structures**. 2. ed. Mineola, New York, Dover, 1999.
- GUIMARÃES, S. R. **Desenvolvimento e aplicação de uma metodologia para previsão de vida de eixos de mandris de bobinadeiras de laminação a frio submetidas a danos**

acumulados por fadiga. 2009. 126 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

RIVA, I. R. R. **Análise de fadiga de estrutura metálicas com ênfase em offshore.** 2004. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

LOESCH, C. L.; HEIN, N. **Pesquisa Operacional** – Fundamentos e Modelos. São Paulo: Saraiva, 2009.

LOPEZ, R. H. L.; ÁVILA, S. J. C. R. A non-intrusive methodology for the representation of crack growth stochastic processes. **Mechanics research communications**. v. 64, p. 23-28, 2015.

MILELLA, P. P. M. **Fatigue and corrosion in metals.** Milan-Itália: Springer-verlag, 2013.

NORTON, R. L. N. **Projeto de Máquinas.** Porto Alegre. 2. ed. 2004.

PARIS, P. C.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. **Journal of fluids engineering**. v. 85, p. 528-533, 1963.

ROSA, E. R.; **Análise de resistência mecânica de peças e componentes estruturais:** Mecânica da Fratura e Fadiga. Florianópolis: GRANTE, 2002.

SANTOS, R. V. S. **Desenvolvimento de uma nova metodologia estabelecendo cotas para a evolução de trincas para modelos de carregamento com amplitude de tensão constante.** 2015. 116 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica dos Sólidos) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

SCHIJVE, J. **Fatigue of Structures and Materials.** New York: Kluwer Academic Publishers, 2009.

SHIGLEY, J. E. S. **Elementos de máquinas.** Rio de Janeiro: LTC, 1984.

SHIGLEY, J. E. S.; MISCHKE, C. R. M.; BUDYNAS, R. G. B. **Projeto de engenharia mecânica.** 7. ed. Michigan: Bookman - USA, 2005.


```

for i=1:n_passos;
    x=a(i);

    g_aux=1;
    %g_aux=1.122-
    0.231*(x/b)+10.55*(x/b)^2-
    21.72*(x/b)^3+30.39*(x/b)^4;
    %g_aux=sqrt(sec(pi*x/(2*b)));

    f_aux=Cw*((1-R)^(gw-
1))* (sqrt(pi*x)*g_aux*delta_sigma)
)^mw;
    K1=delta_N*f_aux;
    x=a(i)+(1/2)*K1;

    g_aux=1;
    %g_aux=1.122-
    0.231*(x/b)+10.55*(x/b)^2-
    21.72*(x/b)^3+30.39*(x/b)^4;
    %g_aux=sqrt(sec(pi*x/(2*b)));

    f_aux=Cw*((1-R)^(gw-
1))* (sqrt(pi*x)*g_aux*delta_sigma)
)^mw;
    K2=delta_N*f_aux;
    x=a(i)+(1/2)*K2;

    g_aux=1;
    %g_aux=1.122-
    0.231*(x/b)+10.55*(x/b)^2-
    21.72*(x/b)^3+30.39*(x/b)^4;
    %g_aux=sqrt(sec(pi*x/(2*b)));

    f_aux=Cw*((1-R)^(gw-
1))* (sqrt(pi*x)*g_aux*delta_sigma)
)^mw;
    K3=delta_N*f_aux;
    x=a(i)+K3;

    g_aux=1;
    %g_aux=1.122-
    0.231*(x/b)+10.55*(x/b)^2-
    21.72*(x/b)^3+30.39*(x/b)^4;
    %g_aux=sqrt(sec(pi*x/(2*b)));

    f_aux=Cw*((1-R)^(gw-
1))* (sqrt(pi*x)*g_aux*delta_sigma)
)^mw;
    K4=delta_N*f_aux;

a(i+1)=a(i)+(1/6)*(K1+2*(K2+K3)+K4
);
end

tempo_RK4=toc

'Fim RK4'

```

```

%-----%
%-----%
%%%%%%%%%% Cotas Superior /
Inferior %%%%%%%%%%
%-----%
%-----%

%-----%
%%Inserir dados de entrada %
%-----%
syms x

%-----%
%%Inserir o a estrela %
%-----%
a_c=1.45*a0;

f_a0=eval(subs(f,x,a0));

%-----%
%-----%
%%%          Calcular a derivada
%%%
%-----%
%-----%
diff_f_a0=eval(subs(f*diff(f,x),x,
a0));
diff_f_a_c=eval(subs(f*diff(f,x),x
,a_c));

%-----%
%-----%
%%          Determinar o conjunto de
ciclos   %%
%-----%
%-----%

N=N0:delta_N:N1;

%-----%
%%Contagem inicial do tempo%%
%-----%

tic

a_sup=a0+(f_a0+(1/2)*diff_f_a_c*N)
.*N;
a_inf=a0+(f_a0+(1/2)*diff_f_a0*N)
.*N;

tempo_cotas=toc

'Fim Cotas'

```

```
%-----%
-----%
%%% Criar o gráfico de curvas
%%%
%-----%
-----%
figure(1),plot(N,a_sup,N,a,N,a_inf
);
xlabel('Número de ciclos [N]');
ylabel('Tamanho da trinca [m]');
legend('Cota superior','RK4','Cota
inferior');
```

```
%-----%
-----%
%%%%%%%%% Calculo do Desvio
para as cotas %%%%%%%%%%
%-----%
-----%
```

```
e_a_sup=100*(a_sup-a)./a;
e_a_inf=100*(a_inf-a)./a;

figure(2),plot(N,e_a_inf,N,e_a_sup
);
xlabel('Número de ciclos [N]');
ylabel('\delta_{Inferior,Superior}
[%]');
legend('\delta_{Inferior}','\delta
_{Superior}');
```

```
%-----%
-----%
%%%%%%%%%%%%% Calculo das
médias %%%%%%%%%%%%%%
%-----%
-----%
```

```
%% Média aritmética %%
media_ar_a=(1/2)*(a_inf+a_sup);
```

```
%% Média geométrica %%
media_geo_a=sqrt(a_inf.*a_sup);
```

```
figure(3),plot(N,media_ar_a,N,medi
a_geo_a,N,a);
xlabel('Número de ciclos [N]');
ylabel('a [m]');
legend('\mu_{Aritmética}','\mu_{Ge
ométrica}','a');
```

```
%-----%
-----%
%%%%%%%%% Calculo do Desvio para
as médias %%%%%%%%%%
%-----%
-----%
```

```
erro_relativo_media_ar=100*(media_
ar_a-a)./a;
erro_relativo_media_geo=100*(media
_geo_a-a)./a;
```

```
figure(4),plot(N,erro_relativo_med
ia_ar,N,erro_relativo_media_geo);
xlabel('Número de ciclos [N]');
ylabel('\epsilon_{\mu_{aritmetica}
,\mu_{geométrica}} [%]');
legend('\epsilon_{\mu_{aritmetica}
}','\epsilon_{\mu_{geométrica}}');
```