

ANÁLISE DO FENÔMENO DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA POR FADIGA ISOTÉRMICA DO MODELO DE TAIRA VIA METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS

Discente: Luan Gustavo BAUMGAERTNER

Professor orientador: Bruno dos Santos

luanbaumga@gmail.com

RESUMO

Componentes mecânicos submetidos a esforços e variações térmicas estão sujeitos ao fenômeno da fadiga, principal responsável pelos colapsos estruturais na indústria mecânica. Essas fraturas ocorrem de forma frágil e acarretam acidentes fatais, de elevado custo financeiro, ambiental e social. Em uma peça submetida à fadiga, inicialmente, ocorre a nucleação da trinca seguida de sua propagação e, por fim, ruptura, processo que é denominado como vida em fadiga de um componente. Para prescrever a vida em fadiga, são usados métodos numéricos para obtenção da curva de evolução de trinca, de forma que, por meio de iterações, resultam em solução acurada e de elevado custo computacional. O objetivo do trabalho é estabelecer cotas que envelopam a solução numérica utilizando a metodologia *Fast Crack Bounds (FCB)*, buscando reduzir o tempo computacional. A viabilidade da solução proposta será realizada por intermédio da combinação do método FCB e da solução numérica de Runge Kutta de quarta ordem (RK4). Como resultado, foi comprovada a eficiência computacional do modelo de Taira aplicado à metodologia FCB em 3259,06 vezes mais rápido que o tempo obtido pela solução numérica de RK4, para o exemplo clássico de placa com largura infinita e trinca central.

Palavras chave: Fadiga térmica, mecânica da fratura linear elástica, Fast Crack Bounds, Modelo de Taira, Runge Kutta de quarta ordem

1. INTRODUÇÃO

As estruturas na engenharia mecânica são submetidas a cargas variáveis no tempo; essas alternâncias de carregamento cíclico provocam o fenômeno da fadiga (DA ROSA, 2002). Segundo Callister (2002), o fenômeno da fadiga representa cerca de 50 a 90% dos colapsos mecânicos, efetivando-se como um desafio para a previsibilidade de eventos, associados à falha mecânica dos componentes.

Segundo a ASTM (2000), define-se a fadiga como o processo de degradação progressiva, localizada e permanente, que ocorre nos materiais, os quais estão submetidos a ações de tensões e deformações de modo cíclico, que provocam a nucleação das trincas e, posteriormente, sua completa fratura. Sendo classificada em fadiga mecânica, de contato e térmica.

As falhas por fadiga térmica são encontradas em usinas termoeletricas, cilindros de laminação, motores diesel, turbinas de aeronaves entre outras tantas aplicações (JUNIOR, 2006). Frente a isso, modelos matemáticos foram criados para analisar a vida em fadiga de um material sob esforço cíclico, a fim de reduzir os custos financeiros e sociais que essas falhas podem acarretar.

Os modelos de propagação de trinca, em geral, são desenvolvidos a partir de um problema de valor inicial (PVI), obtidos empiricamente por meio da análise de um determinado material, por intermédio de ensaios que consideram a composição química, resistência mecânica e a geometria da trinca (VIRKUNNEN, 2001). Diante disso, faz-se necessário o uso de métodos numéricos para encontrar a solução numérica aproximada, sendo que o método mais utilizado atualmente é o de Runge-Kutta, de quarta ordem (RK4), o qual requer grande esforço computacional (SANTOS, 2019).

Com o objetivo de contornar esse problema, Ávila *et al.* (2016) propõem a metodologia Fast Crack Bounds (FCB), a qual introduz funções de cota superior e inferior para a função de crescimento de trinca, envelopando o comportamento das soluções dos modelos de propagação de trinca (SANTOS, 2019). Dessa forma, a metodologia fornece uma análise da vida útil de um componente submetido à fadiga térmica, otimizando os recursos computacionais envolvidos.

O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento da metodologia FCB para o modelo de Taira. Para isso, desenvolvem-se funções de cotas, que são obtidas a partir da expansão em série de Taylor, retendo termos de segunda ordem com resto de Lagrange. Encontradas as funções de cota, compara-se o tempo computacional de método FCB com o método tradicional de RK4.

2. MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

A mecânica da fratura (MF) considera que elementos mecânicos, ainda que não submetidos a solicitações, possuem trincas, tendo como objetivo determinar se essas trincas podem levar o componente analisado ao colapso dentro das tensões de trabalho. É

dividida em: Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP) e Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE),(SANTOS 2019).

A MFLE é baseada em procedimentos analíticos, em que são relacionadas à magnitude e à distribuição de tensões encontradas na vizinhança da ponta da trinca com a tensão nominal aplicada ao componente, dimensão e geometria da trinca. Dessa forma, a MFLE tem como base os fundamentos da teoria da elasticidade (ANDERSON, 2005) e, segundo Bannatine et al. (1989), desenvolve-se a partir das seguintes hipóteses:

- (H1). Existência de uma trinca;
- (H2). Material elástico linear, isotrópico e homogêneo;
- (H3). Pequenas deformações;
- (H4). Estado plano;
- (H5). Modos de carregamento.

Com as hipóteses de trabalho conhecidas, são definidas as tensões de trabalho obtidas nas proximidades da trinca, conforme figura 1.

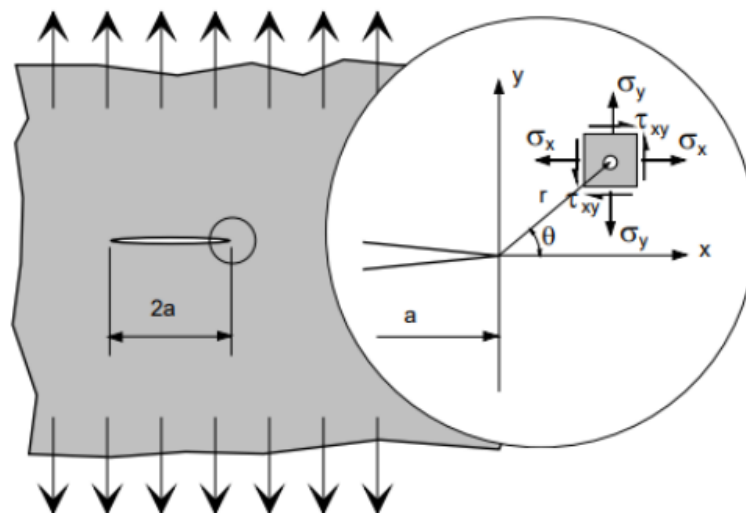


Figura 1: Tensões na vizinhança do vértice da trinca

Fonte: Adaptado de Schivje (2009).

As tensões presentes na frente da ponta da trinca responsáveis pela sua propagação são tensões normais representadas por “ σ ” referindo-se às solicitações normais que, quando aplicadas ao material, produzem as tensões cisalhantes representadas por “ τ ”.

2.1 FADIGA TÉRMICA

A fadiga térmica é definida como a degradação progressiva que ocorre em um componente devido a trincas em seu interior oriundas de ciclos térmicos de aquecimento

e resfriamento (SPERA, 1976). Classificada como uma fadiga de baixo ciclo, ocorre em uma ordem de grandeza de ciclos inferior a dez elevado à oitava (CARDOSO, 2016).

A fadiga de baixo ciclo é classificada em dois tipos, como apresentado na figura 2, a saber, fadiga térmica, se a temperatura não for constante ao longo do tempo, ou isotérmica, se a temperatura for constante ao longo do tempo.

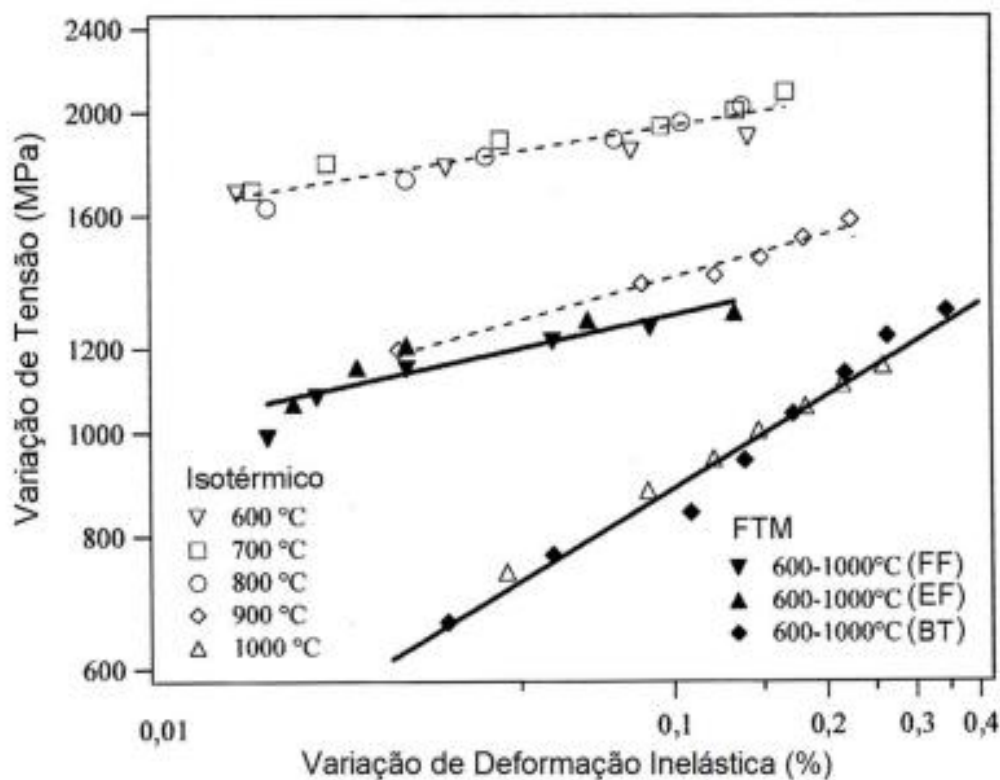


Figura 2: Curvas de tensão-deformação cíclicas isotérmicas e termomecânicas.

Fonte: Adaptado de Engler-Pinto Junior e Spinelli (2014).

Diante disso, observa-se a diferença, no gráfico isotérmico, em relação à temperatura, visto que não varia sua amplitude, em comparação ao gráfico da fadiga termomecânica (FTM). Há um *range* de temperatura, ora atingindo 600°C, ora 1000°C; em outras palavras, a amplitude de temperatura é variável.

Na fadiga isotérmica, a força motriz do processo de propagação de trincas é a contração e expansão térmica, oriundas dos ciclos térmicos.

2.2 CONTRAÇÃO E EXPANSÃO TÉRMICA

Os materiais mecânicos, quando expostos a alguma variação de temperatura, sofrem dilatações ou contrações térmicas. Quando o processo de dilatação é restringido, ocorre o surgimento de tensões internas no material, denominadas como tensões térmicas.

A propagação de trincas ocorre pela alternância de tensões devido à aplicação de ciclos de temperatura. As tensões térmicas oriundas dos ciclos de temperatura aliadas a variações locais de propriedade dentro do metal resultam em restrições locais, como mostrado na figura 3. Ao mesmo tempo em que a restrição do sistema é proporcionada pela própria rigidez do próprio material, quando a dilatação do material é impedida por esses motivos, há uma progressão da trinca (JUNIOR, 2006).

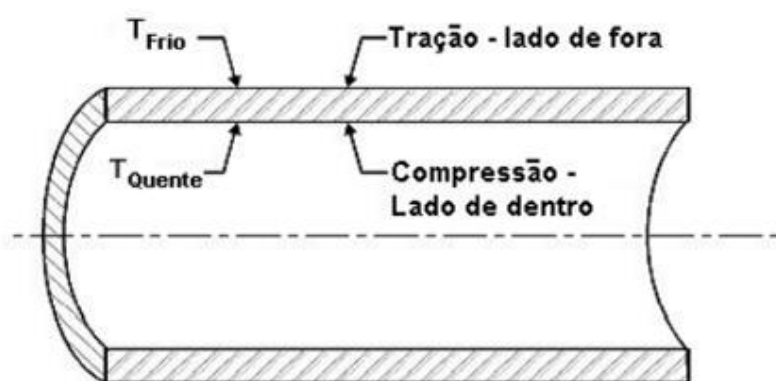


Figura 3: Efeito da restrição local dentro da tubulação devido ao fenômeno da Fadiga térmica.

Fonte: Adaptado de Deardoff (2004).

A figura 3 ilustra o comportamento de um duto metálico, no qual, na região interna, a alta temperatura tende a expandir o material já pelo lado externo; com baixa temperatura, gera uma tensão de reação que restringe o movimento de expansão fazendo com que a parede seja comprimida. Esse gradiente de tensões tende a iniciar a propagação onde há trinca e essa propagação é descrita em 3 etapas, a saber: nucleação, propagação e fratura, conforme figura 4.

2.3 ETAPAS DA FADIGA

Inicia-se a nucleação na superfície do material e sua propagação ocorre a aproximadamente 45° do eixo de tensões, provocando o crescimento da trinca de forma

ainda microscópica a uma escala de micrometros por ciclo, as quais ficam alojadas na estrutura cristalográfica do material (RIVA 2004).

A segunda etapa é caracterizada pela propagação da trinca, saindo da escala microscópica para escala macroscópica, em que a estrutura cristalográfica perde o efeito sobre a propagação, substituindo-se pelas tensões aplicadas (ROSA, 2002).

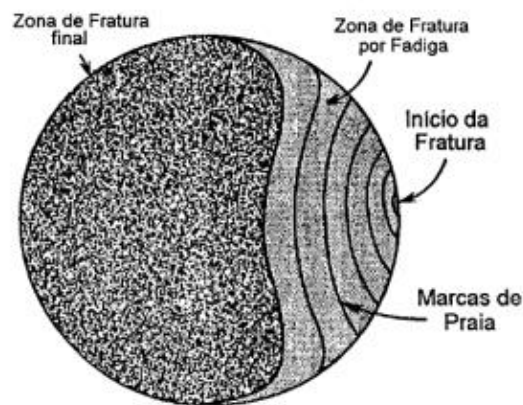


Figura 4: Representação esquemática das etapas da fadiga

Fonte: Adaptado de Reed-Hill (1982).

Por fim, na terceira etapa, ocorre a ruptura do material, caracterizando-se como uma ruptura frágil, com tensões abaixo da tensão de escoamento do componente, conforme figura 5.

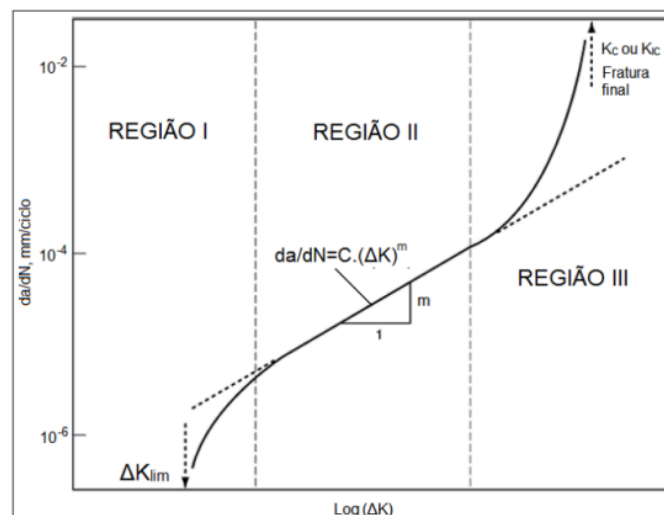


Figura 5: Diagrama log da/dN pelo log (ΔK)

Fonte: Adaptado de ASM handbook (1998).

O crescimento da trinca por número de ciclos “da/dN”, em função do elemento forçante “ΔK”, é representado pela equação 1 (SANTOS, 2019),

$$\Delta K = \sqrt{\pi a f(a)} \Delta \sigma \quad [1]$$

Na equação 1, “f(a)” é a função “tamanho de trinca”, “Δσ” como a tensão aplicada sobre o material e “a” a dimensão inicial da trinca.

A fim de prescrever a vida em fadiga, foram desenvolvidos modelos matemáticos para as três fases.

2.4 MODELOS MATEMÁTICOS PARA PROPAGAÇÃO DE TRINCA

Os modelos matemáticos para o cálculo de propagação de trinca surgiram para prescrever a vida em fadiga de um determinado componente, para que, assim, fossem tomadas contramedidas, a fim de evitar prejuízos sociais e econômicos.

O modelo de Paris-Erdogan, para a região II do gráfico apresentado na figura 5, é usado para prescrever a vida em fadiga de componentes submetidos à fadiga mecânica representada pela equação 2.

$$\frac{da}{dN} = C * \Delta K^m \quad [2]$$

Porém, o modelo de Paris considera as tensões aplicadas, tornando-se ótimo para prescrição da vida em fadiga por carregamento mecânico, entretanto, falha quando observado do ponto de vista térmico. Com esse intuito, Taira (1976), adaptando o modelo, passa a considerar as deformações das amostras resultando no modelo a seguir.

2.4.1 MODELO DE TAIRA

O modelo de Taira é uma derivação do modelo de Paris, porém, ao invés de levarmos em conta a variação das tensões axiais, são consideradas as deformações elásticas e plásticas do material, obtendo a seguinte equação:

$$\frac{da}{dN} = C \left[\left(\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_f} \right) * (\pi * a)^{\frac{1}{2}} \right]^m \quad [3]$$

Desse modo, “C” e “m” são constantes empíricas do material; “a” como tamanho de trinca e “ε” como a deformação do material. Essa é uma equação diferencial, de maneira que são necessários métodos numéricos para sua resolução.

2.4.2 MÉTODO NUMÉRICO RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

São denominadas equações diferenciais aquelas que possuem derivadas com uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes (LIMA, 2008). O método RK consiste na comparação com um polinômio de Taylor, retirando-se as derivadas e avaliando a função em cada iteração (VALLE, 2012). O método RK busca uma melhor aproximação para o valor da derivada considerando mais pontos dentro do intervalo “[x_n , x_{n+1}]” (STERZA e BRANDI, 2016), sendo assim descrito por:

$$y_{n+1} = y_n + h \quad [4]$$

“ y_{n+1} ” é uma constante de inclinação encontrada pelo cálculo de inclinação em diversos pontos no interior do subintervalo. A ordem do método aponta o número de pontos usados em um subintervalo para determinar o valor da inclinação. Aplicando $x = x_{n+1} = x_n + h$ e $a = x_n$ na equação (1) sendo $n = 4$, tem-se:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(\xi) \quad [5]$$

Sendo Runge Kutta de quarta ordem o processo para delimitar as constantes apropriadas com $\xi \in (t_n, t_{n+1})$, buscando encontrar as constantes que atendem a [6]:

$$y_{n+1} = y_n h (c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4) \quad [6]$$

Em que as constantes k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são dadas por:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, x_n) \\ k_2 = f(t_n + a_1 h, x_n + \beta_1, h k_1) \\ k_3 = f(t_n + a_2 h, x_n + \beta_2, k_1 + \beta_3 h k_2) \\ k_4 = f(t_n + a_3 h, x_n + \beta_4, k_1 + \beta_4 k_2 + \beta_5 h k_3) \end{cases} \quad [7]$$

Resolvendo o sistema, a equação do modelo RK4 é dada por:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (f(k1) + 2f(k2) + 2f(k3) + f(k4)); \\ k1 = f(y_n) \\ k2 = f(y_n + \left(\frac{h}{2}\right)f(k1)); \\ k3 = f(y_n + \left(\frac{h}{2}\right)f(k2)); \\ k4 = f(y_n + hf(k3)) \end{cases} \quad [8]$$

“ K_1 ” representa o coeficiente angular do extremo esquerdo do intervalo; “ K_2 ” é coeficiente angular do ponto médio; “ K_3 ” é a segunda aproximação do coeficiente angular do ponto médio e “ K_4 ” é o coeficiente angular em $(y_n + h)$. Esse método apresenta um elevado custo computacional; desejando reduzir o tempo computacional, aplica-se a metodologia *Fast Crack Bounds* (FCB).

2.5 METODOLOGIA “FAST CRACK BOUNDS”

De acordo com Ávila *et al.* (2015), a metodologia FCB tem como objetivo determinar as cotas inferior " a_{cl} " e superior " a_{cs} " para a função de propagação de trinca. As funções cotas aproximam-se de forma acurada da solução numérica aproximada, obtida pelo método numérico de RK4 e devem satisfazer à seguinte desigualdade [9] (MACHADO JR., 2015):

$$(a_{cl}(N)) \leq a(N) \leq (a_{cs}(N)), \forall N \in [N_0, N_1]; \quad [9]$$

As funções cotas são obtidas a partir da expansão em série de Taylor da função tamanho de trinca, retendo os termos de segunda ordem com resto Lagrange (MACHADO JR., 2015), conforme [11]:

$$a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N_1]. \quad [10]$$

Sendo " $a(N)$ " o tamanho da trinca, após “ N ” número de ciclos, " a_0 " refere-se ao tamanho inicial da trinca.

Por intermédio das funções de cotas superior e inferior, é possível uma aproximação numérica para a função tamanho de trinca.

3 METODOLOGIA

A metodologia é dividida em 3 etapas. A primeira será o levantamento das amostras, sucedido do método FCB aplicado ao modelo de Taira, sendo efetuada sua formulação matemática do problema com intuito de realizar a determinação das cotas inferior e superior para o modelo de trinca.

A segunda etapa ocorrerá dentro de ambiente computacional, sendo o Gnu Octave 7.2.0 o software escolhido para o processo, pois é uma ferramenta de resolução de problemas numéricos complexos lineares e não-lineares, e open source, ou seja, um software livre. Nessa etapa, serão desenvolvidos algoritmos de base, com o intuito de simular os modelos matemáticos propostos, sendo eles FCB e Runge-Kutta de quarta ordem, aplicados ao modelo de propagação de trinca de Taira. No final da simulação, o sistema fornecerá dados para serem estudados e analisados, iniciando a terceira etapa. Os resultados fornecerão uma base de dados para comparar a eficiência do método proposto neste trabalho e do método padrão usado nas literaturas.

3.1 LEVANTAMENTO DAS AMOSTRAS

Os dados obtidos para simulação da metodologia FCB são referentes aos materiais das amostras apresentados na tabela 1 e 2, em que se tem a composição química, as propriedades físicas e mecânicas respectivamente, os quais foram extraídos do trabalho de Virkkunen (2001).

Tabela 1: Composição química das amostras

AMOSTRA	MATERIAL	Cr	Ni	Mo	Mn	Si	Outros
A	AISI 304L	17,4	10,2	-	1,6	0,8	-
B	AISI 316	17,9	12,7	2,7	1,33	0,3	-
C	AISI 321	17,8	10,7	0,4	1,6	0,3	0,1Cu;0,5Ti;0,2Co
D	AISI 321	19,6	10	-	0,9	0,7	0,4Ti
E	ASIS 321	19,6	10	-	0,9	0,7	-
F	AISI 347	17,3	9,2	0,4	1,5	0,4	0,4Cu;0,5Cb;0,1Co
G	AISI 347	17,3	9,2	0,4	1,5	0,4	0,4Cu;0,5Cb;0,1Co
H	3RE60	18,5	4,9	2,9	1,5	1,5	0,1N
I	ACX-100	23,4	5,3	2,2	0,6	0,6	0,2N

Fonte: Adaptado de Virkkunen (2001).

Tabela 2: Propriedade físicas e mecânicas das amostras

AMOSTRA	MATERIAL	R _p (MPa)	R _m (MPa)	E (GPa)	k (W/mK)	α (10 ⁶ K ⁻¹)
A	AISI 304L	180	460	200	15	16
B	AISI 316	205	510	200	15	16,5
C	AISI 321	180	460	205	15	16
D	AISI 321	205	500	200	15	16
E	ASIS 321	205	500	200	15	16
F	AISI 347	205	510	200	15	16
G	AISI 347	205	510	200	15	16
H	3RE60	450	730	200	15	14
I	ACX-100	460	660	200	15	13

Fonte: Adaptado de Virkkunen (2001).

Em que " R_p " representa o limite de escoamento e " R_m " a resistência máxima à tração; "E" o módulo de elasticidade, "k" condutividade térmica e "α" difusidade térmica do material.

3.2 MÉTODO FAST CRACK BOUNDS APLICADO AO MODELO DE TAIRA

O modelo matemático para evolução da trinca é formulado pelo seguinte PVI:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } a \in C^1, \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = C \left[\left(\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_f} \right) * (\pi * a)^{\frac{1}{2}} \right]^m \\ a(N_0) = a_0. \end{cases} \quad [11]$$

Usando a expansão em série de Taylor com resto de Lagrange e considerando as seguintes Hipóteses:

$$\begin{aligned} H_1: & \Delta \varepsilon(N) = \Delta \varepsilon, \forall N \in [N_0, N_1]; \\ H_2: & f \in C^1(\mathbb{R}^+); \\ H_3: & 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ H_4: & f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{aligned} \quad [12]$$

A hipótese H_1 assume que a deformação total é constante; a segunda hipótese H_2 garante que a função de correção do fator de intensidade de deformação é contínua; H_3 estabelece que a função geometria deve ser monótona não decrescente. A quarta hipótese H_4 assegura que a derivada da função geometria seja monotonamente não decrescente. Essas hipóteses definem as bases do teorema que determinará as cotas para a função tamanho de trinca (SANTOS,2019).

TEOREMA (Método FCB aplicado ao modelo de Taira): Sejam " $f(\cdot)$ " e " $\Delta(\cdot)$ " funções que satisfaçam as hipóteses (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) " a " $\in [a_0, a_1]$, então, as cotas superior e inferior são válidas:

$$\begin{cases} a_{cs}(N) = a_0 + \left\{ C \left[\left(\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_p} \right) * (\pi * a_0)^{\frac{1}{2}} \right]^m + \frac{1}{2} \left[m C^2 \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Delta \varepsilon}{\varepsilon_f} \right)^{2m} \cdot \left(\frac{(a)^m}{2(a)^*} \right) \right] (N - N_0)^2 \right\} \\ a_{ci}(N) = a_0 + \left\{ C \left[\left(\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_p} \right) * (\pi * a_0)^{\frac{1}{2}} \right]^m + \frac{1}{2} \left[m C^2 \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Delta \varepsilon}{\varepsilon_f} \right)^{2m} \cdot \left(\frac{(a_0)^m}{2(a_0)} \right) \right] (N - N_0)^2 \right\} \end{cases} \quad [13]$$

Prova: Das hipóteses (H_2) , (H_3) , (H_4) , por meio da série de Taylor de segunda ordem com resto de Lagrange, segundo Santos (2015), tem-se:

$$a(N) = a_0 + \frac{da}{dN} (N - N_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 a}{dN^2} (\eta) \right) (N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N_1]. \quad [14]$$

Com base nas hipóteses (H_2) , (H_3) e (H_4) , as seguintes desigualdades podem ser escritas:

$$a(S) \leq a(t), S \leq t \in [N_0, N] \rightarrow (a(s))^m \leq (a(t))^m \quad [15]$$

Pelas hipóteses (H_2) , (H_3) e (H_4) , obtém-se:

$$(f(S))^m \leq (f(t))^m \rightarrow \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot f \right)^m \leq \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot f \right)^m (t), s \leq t \text{ cm } s, t \in [N_0, N] \quad [16]$$

Desse modo, constata-se que:

$$(\Delta \varepsilon)^m (a(S)) \leq (\Delta \varepsilon)^m (a(t)) \quad [17]$$

Uma vez que $C > 0$:

$$\frac{da}{dN}(s) \leq \frac{da}{dN}(t), s \leq t \text{ com } s, t \in [N_0, N] \quad [18]$$

A segunda derivada da função tamanho de trinca é:

$$\frac{d^2a}{dN^2} = \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) = \left[mC^2 \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Delta\varepsilon}{\varepsilon_f} \right)^{2m} \cdot \left(\frac{a^m}{2a} \right) \right] \quad [19]$$

Fazendo a substituição da equação 19 na equação 14 da expansão de Taylor com resto de Lagrange, obtém-se:

$$a(N) = a_0(N_0) + C \left[\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_f} \right) \cdot (\pi * a)^{\frac{1}{2}} \right]^m (N - N_0) + \frac{1}{2} \left[mC^2 \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Delta\varepsilon}{\varepsilon_f} \right)^{2m} \cdot \left(\frac{a^m}{2a} \right) \right] (N - N_0)^2 \quad [20]$$

Substituindo a equação 20, na equação 14 temos:

$$\left\{ a_{cs}(N) = a_0 + \left\{ \begin{array}{l} C \left[\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_f} \right) * (\pi * a_0)^{\frac{1}{2}} \right]^m + \\ \frac{1}{2} \left[mC^2 \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Delta\varepsilon}{\varepsilon_f} \right)^{2m} \cdot \left(\frac{(a)^m}{2(a)^*} \right) \right] \end{array} \right\} (N - N_0) \right\} \quad [21]$$

Corresponde a equação 22 à função de cota, na qual temos o tamanho da trinca inicial acrescido de equação do modelo de Taira, somado à sua segunda derivada [20]; assim, caracteriza-se a série de Taylor de segunda ordem devido à derivada segunda, com resto de lagrange.

3.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Para comparação e análise dos métodos Runge Kutta, de quarta ordem (RK4), e a metodologia *Fast Crack Bounds* (FCB), aplicado ao modelo de Taira, desenvolve-se um algoritmo no ambiente de software Gnu Octave, versão 7.2.0.

Para obtenção dos resultados, o código foi empregado em um computador com as seguintes características: Processador Intel(R) Core(TM) i5-8300H CPU de 2.30GHz e uma memória RAM de 8GB.

Os parâmetros aplicados ao algoritmo foram retirados dos trabalhos de Virkkunen (2001). Dessa forma, a tabela 3 informa as variáveis utilizadas no modelo de Taira, sendo " m " e " C " parâmetros do material, " N_1 " o número de ciclos final da simulação, " a_0 " o tamanho inicial da trinca e " $\Delta\epsilon$ " a variação da deformação total do material.

Tabela 3: Dados usados para simulação

AMOSTRA	C (Adm)	m (Adm)	N_1 (Adm)	$\Delta\epsilon$ (Adm)	a_0 (mm)
A	1,6	2,0	$5 \cdot 10^3$	0,0063	$50 \cdot 10^{-5}$
B			$10 \cdot 10^3$	0,0027	
C			$20 \cdot 10^3$	0,0040	
D			$5 \cdot 10^3$	0,0081	
E			$10 \cdot 10^3$	0,0086	
F			$6 \cdot 10^3$	0,0079	
G			$10 \cdot 10^3$	0,0078	
H			$40 \cdot 10^3$	0,0035	
I			$40 \cdot 10^3$	0,0033	

Fonte: Autor (2022).

Um outro dado que se considera ao conceber o algoritmo é a posição da trinca em relação ao material, podendo ser na superfície da amostra, como neste caso, uma placa de largura infinita com trinca central. O termo largura infinita representa que a dimensão da largura da placa é muito superior à dimensão inicial da trinca, sendo assim, utiliza-se um fator de correção para esse caso, o qual será abordado a seguir.

4. RESUTADOS E ANÁLISES

4.1 PLACA DE LARGURA INFINITA E TRINCA CENTRAL

O problema utiliza a função de correção do fator de intensidade de deformação para o caso de “placa com largura infinita e trinca central”, representado na figura 6. Esse fator é demonstrado por Bannantine *et al.* (1989), equação 23.

$$f(a) = 1, \quad em (N_0, N_1) \quad [22]$$

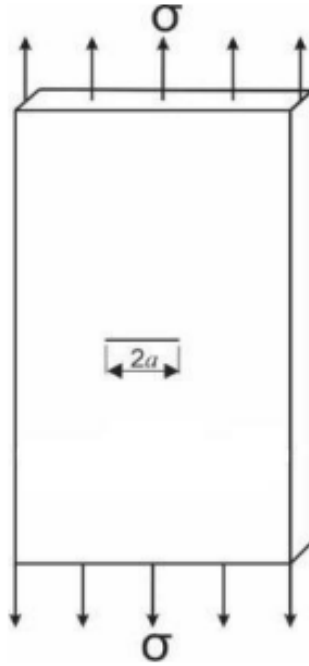


Figura 6: Placa infinita com trinca central

Fonte: Adaptado de Machado Jr. (2015).

Feita a aplicação do fator de correção determinado, serão analisados os dados para o modelo de Taira. Os resultados apresentados serão: materiais analisados, funções do tamanho de trinca resultados obtidos via método numérico RK4 e FCB, respectivamente.

Nota-se que, na equação da cota superior, o valor da cota superior depende do valor inicial de " a^* ". Portanto, $a^* > a_0$; dessa forma, atribuem-se valores para a^* , sendo $a^* = \beta a_0$, logo $\beta > 1$. Assim, o valor do coeficiente " β " não pode exceder a cota superior, o que significa que se deve obter um valor para a cota superior maior que o obtido pelo método de RK4. Esse valor é definido empiricamente (MACHADO JR., 2015).

Para aferir o desempenho das cotas, foi definida uma função de "desvio relativo" $\delta_{inferior,superior}: \{0,1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\delta_{inferior,superior}(N_K) = 100 \left(\frac{a_{cs,ci} - a_{RK4}}{a_{RK4}} \right) (N_K) [\%], \forall N_K \{0,1 \dots N\} \quad [23]$$

Em seguida, serão apresentados os gráficos comparativos entre a metodologia FCB e o método RK4, com o número de ciclos e o tamanho da trinca, além da razão entre os tempos computacionais de ambos os métodos.

4.2 DESEMPENHO DAS COTAS VIA METODOLOGIA FCB

Para realizar a simulação aos materiais apresentados previamente, é preciso definir a variável a^* , a qual é encontrada de maneira empírica, no intervalo analisado de número de ciclos “ N ”, obtendo-se o menor valor de modo que não viole a solução numérica aproximada de RK4.

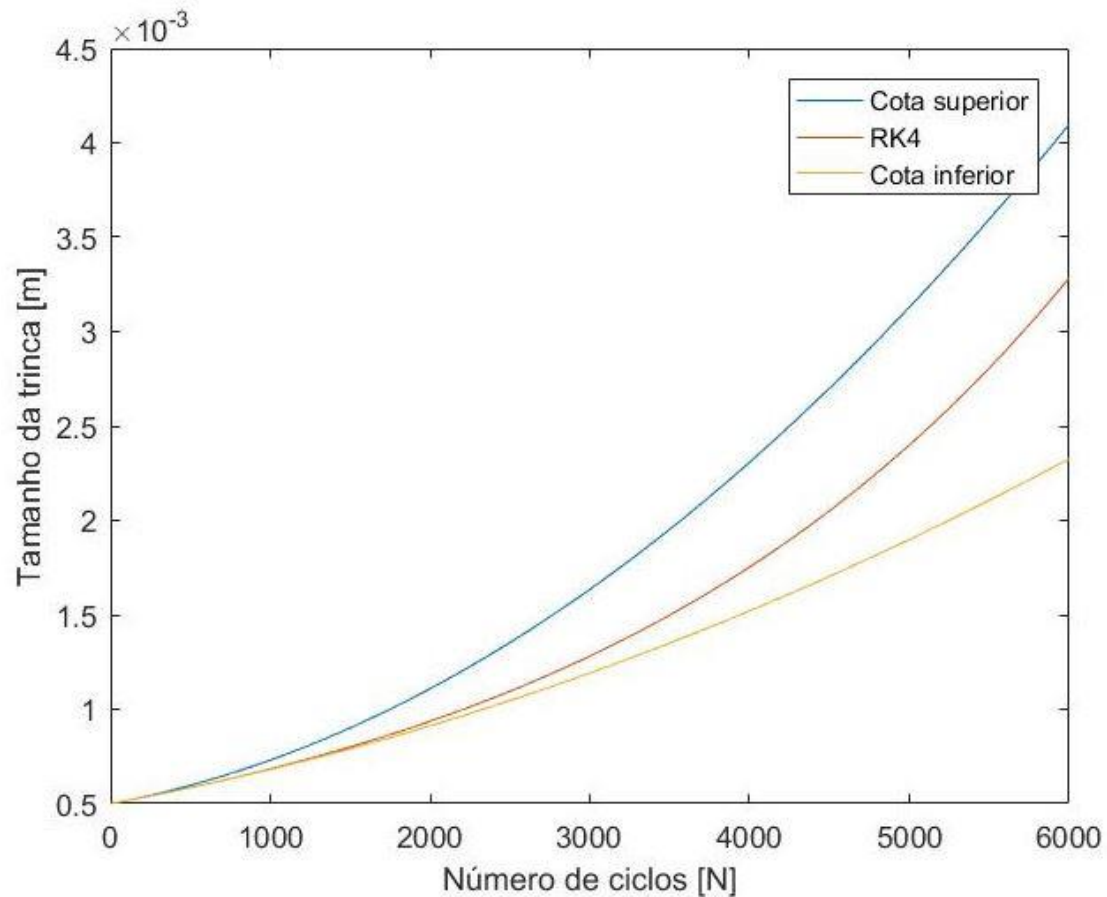


Figura 7: Funções cota superior e inferior comparada a solução numérica de RK4 – AMOSTRA F. Com valor de $a^* = 3,0 a_0$.

Fonte: Autor (2022).

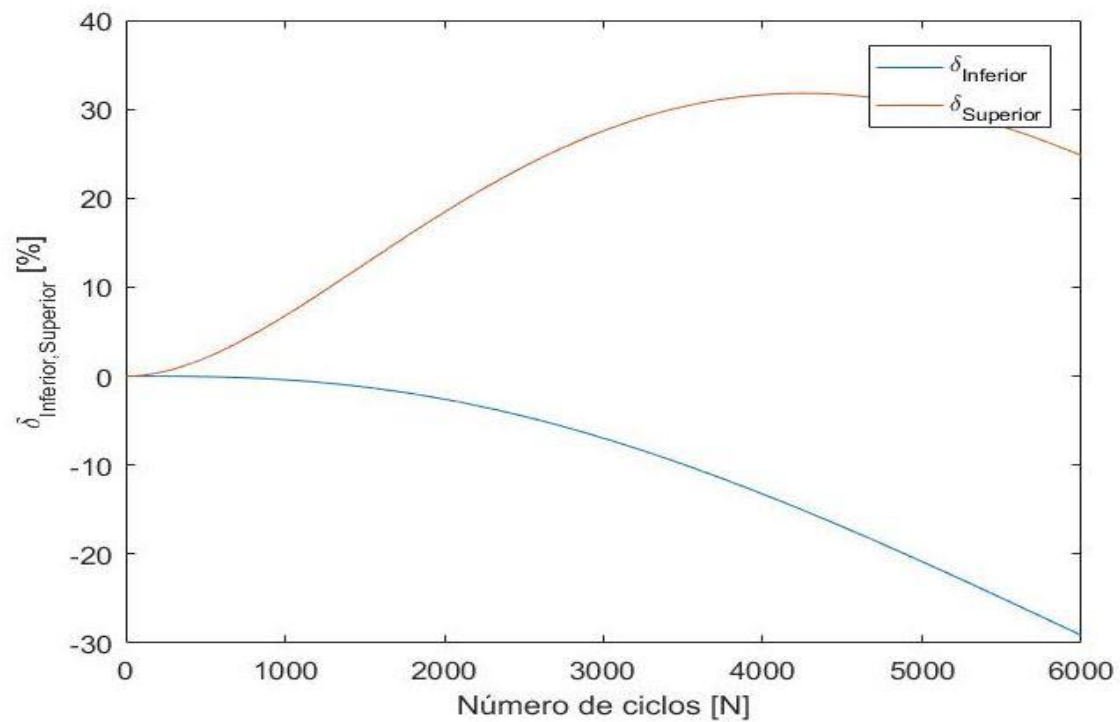


Figura 8: – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior - AMOSTRA F. Com valor de $a^* = 3,0 a_0$

Fonte: Autor (2022).

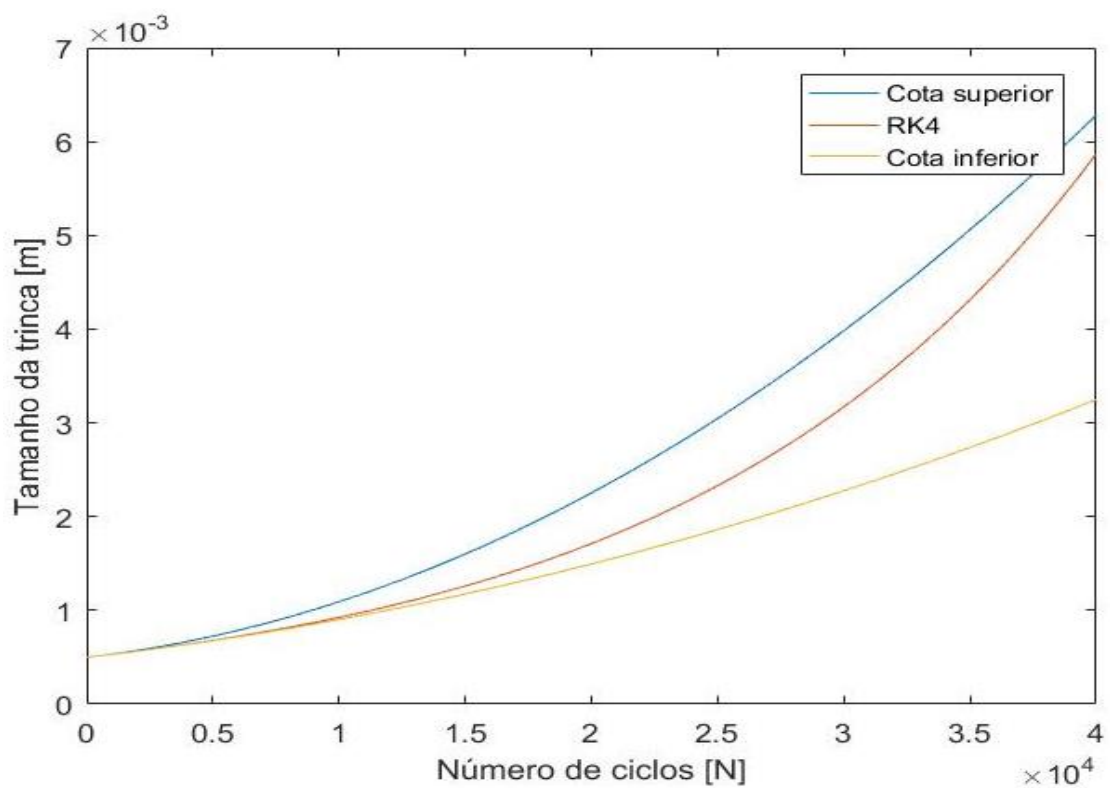


Figura 9: Funções cota superior e inferior comparada a solução numérica de RK4 – AMOSTRA H. Com valor de $a^* = 3,0 a_0$.

Fonte: Autor, (2022).

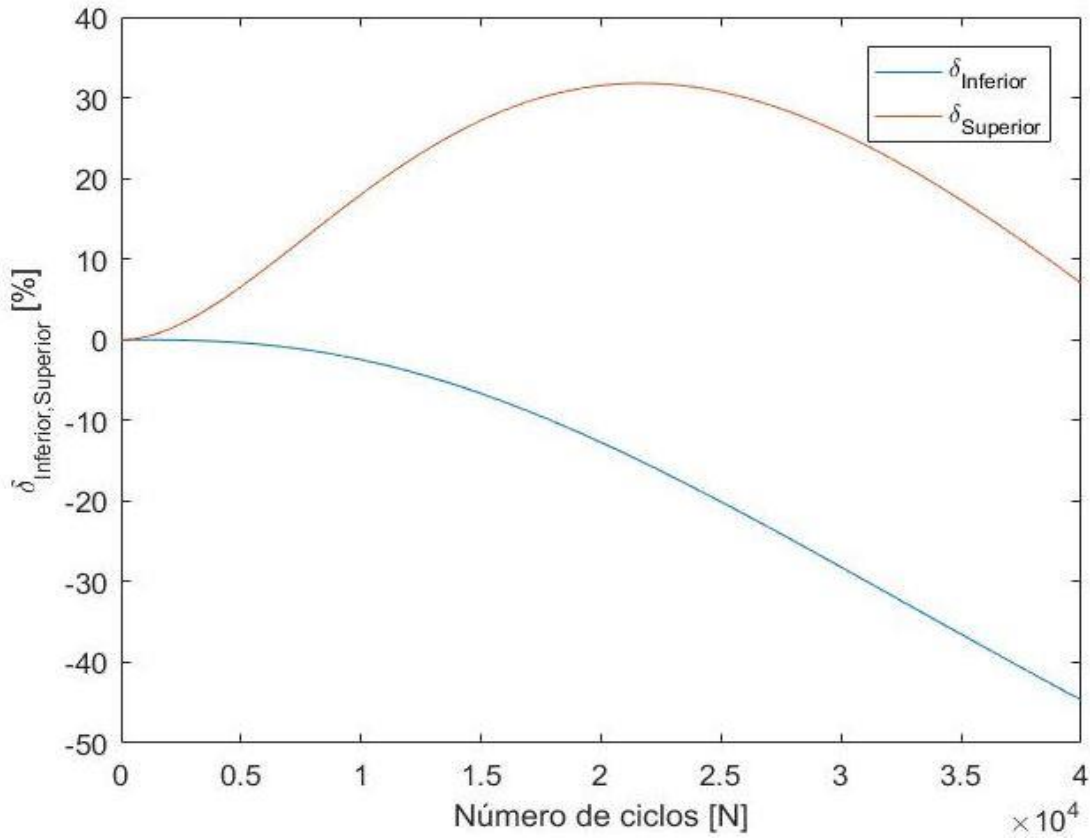


Figura 10 : Função desvio relativo entre cotas superior e inferior - AMOSTRA

H. Com valor de $a^* = 3,0 a_0$

Fonte: Autor, (2022).

4.3 SINTESE DOS RESULTADOS

Com os valores obtidos, é possível verificar que o tempo para determinação das cotas via metodologia FCB é superior ao tempo de processamento do método numérico RK4, como demonstrado na tabela 3, em que “ ρ ” é a razão entre os tempos representada pela equação 24:

$$\rho = \left(\left(\frac{T_{RK4} - T_{FCB}}{T_{FCB}} \right) * 100 \right) \quad [24]$$

T_{RK4} representa o tempo computacional do método numérico RK4 e T_{FCB} , sendo o tempo computacional do método FCB.

Tabela 3: Tempo de execução das amostras

AMOSTRA	RK4 (s)	FCB (s)	ρ (%)
A	0.0089126	0.0006322	1309,77
B	0.0112824	0.0006815	1555,52
C	0.0149793	0.0012035	1143,87
D	0.0088079	0.0006431	1268,37
E	0.0111069	0.0007663	1349,41
F	0.0091895	0.0006236	1373,62
G	0.0111416	0.0006744	1552,07
H	0.0231328	0.0008496	2622,79
I	0.0241315	0.0007184	3259,06

Fonte: Autor, (2022).

5. CONCLUSÃO

O presente artigo trata-se de um trabalho de conclusão de curso para o bacharelado em engenharia mecânica do Centro Universitário FAG, cujo tema de pesquisa é: “Análise do fenômeno de propagação de trinca por fadiga isotérmica do modelo de Taira via metodologia *fast crack bounds*”, sob a orientação do Prof. Me. Eng. Bruno dos Santos.

Neste trabalho, foi realizada a aplicação da metodologia FCB ao modelo de Taira para propagação de trinca. A verificação do comportamento das cotas foi feita para oito amostras diferentes, analisadas por meio de gráficos $a(N) \times N$ e seus respectivos desvios relativos. Por fim, a metodologia foi comparada à solução numérica do método de RK4.

Nesse contexto, foi possível validar a eficiência da metodologia FCB para análise do fenômeno “tamanho de trinca”, em casos de fadiga térmica, para o modelo de propagação de trincas de Taira, devido à eficiência de, no mínimo, 1143,87 (parâmetro a2.0) vezes superior ao método convencional de RK4.

Para as amostras simuladas, o tempo computacional da metodologia FCB foi de até 3259.06 vezes menor que o obtido pelo RK4, Comprovando a eficiência computacional das funções de cota.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

As informações absorvidas no desenvolvimento deste artigo de conclusão de curso podem ser acrescidas por meio das seguintes recomendações:

i. Neste projeto, a metodologia FCB foi aplicada ao modelo de Taira. Portanto, sugere-se que a metodologia seja aplicada a outros modelos matemáticos, para, assim, aumentar a base de dados de comparação e validar cada vez mais a metodologia.

ii. Foi utilizado, neste trabalho, baseado na MFLE, apenas um modo de carregamento, podendo ser aplicado aos outros dois modos para obtenção de mais resultados.

iii. Por fim, empregar a metodologia para outros tipos de materiais, buscando diversidade de características físicas, logo, outras propriedades.

6. REFERÊNCIAS

ALVARENGA JÚNIOR, A. **Avaliação Experimental Dos Efeitos Da Fadiga Térmica Nas Propriedades Mecânicas De Um Aço Inoxidável Austenítico**. 2006. 145 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006

BANNANTINE, J. A.; COMER, J. J.; HANDROCK, J. L. **Fundamentals of Metal Fatigue Analysis**. Prentice Hall: [s. l.] 1989

CALLISTER, W. D. Fadiga. In: CALLISTER, W. D. **Ciência e engenharia de materiais: Introdução**. 5. ed. Utah: Ltc, 1999. p. 166-185

CARDOSO, P. C. **Determinação do Parâmetro Relevante para Caracterização de Dano em Fadiga em Aço Inoxidável Austenítico**. 2016. 68 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

ENGLER-PINTO JÚNIOR, Carlos Carvalho; SPINELLI, Dirceu (comp.). **Isothermal and thermomechanical fatigue of a nickel-base superalloy**: fadiga isotérmica e termomecânica de uma superliga à base de níquel. Tecnologia em Metalurgia, Materiais e Mineiração, São Paulo, v. 11, p. 125-130, 2014.

MACHADO JUNIOR, W. M. **Aplicação da Metodologia Numérica “Fast Bounds Crack” para uma Estimativa Eficiente da Evolução do Tamanho de Trinca**. 2015.

66 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

MENEGAZZO HENRIQUE, G. **Análise teórica e numérica do fenômeno de fadiga térmica do modelo de Solomon via metodologia “Fast Crack Bounds”**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso – Centro Universitário Fundação Assis Gurgacz, Cascavel, 2021

ROSA, E. **Análise de resistência mecânica de peças e componentes estruturais: Mecânica da Fratura e Fadiga**. Florianópolis: Grante, 2002.

RIVA, Ikaro dos Reis. **Análise de fadiga de estruturas metálicas com ênfase em offshore**. 2004. 160 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Mecânica Aplicada A Estruturas, Universidade Federal do Rio de Janeiro Escola Politécnica, Rio de Janeiro, 2004.

SANTOS, B. **Quantificação Da Incerteza Do Modelo De Forman Via Metodologia “Fast Crack Bounds”**. 2019. 105 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

SPERA, D. A. **Thermal Fatigue of Materials and Components**. Pensilvânia: ASTM International, 1976;

STERZA, R. L; BRANDI, A. C. **Comparação entre métodos numéricos: Runge-Kutta de quarta ordem e previsor-corretor. C.Q.D.** – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 7, p. 12-22, dez. 2016. DOI: 10.21167/cqdv07ermac201623169664rlsacb1222. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/>. Acesso em: 27 maio 2021.

STROHAECHER, T. R. **Mecânica da fratura**- Escola de engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul Laboratório de metalurgia física.

TAIRA, Shuji; FUJINO, Motoaki. **Effect of Temperature on the Rate of Fatigue Crack Propagation in Steels during Low Cycle Fatigue***. Transactions Isij, [s. l], v. 16, p. 147-152, 1976.

VALLE, K. N. F. **Métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta**. 2012. 40 f. Monografia (Pós-Graduação em Matemática para professores com ênfase em cálculo) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012

VIRKKUNEN, I. **Thermal Fatigue of Austenitic and Duplex Stainless Steels**. 2001. 115 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Department Of Mechanical Engineering, Helsinki University Of Technology, Spoo, 2001.

WULPI J. DONALD, **Understanding How Components Fail** 2 ed. 1999