

ESTUDO DO ACIDENTE AÉREO DE UM BOEING 747-200 DA CHINA AIRLINES: UMA ESTIMATIVA DE VIDA EM FADIGA BASEADO NA APLICAÇÃO DA METODOLOGIA *FAST CRACK BOUNDS*

Discente: Lucas BONESCHI
Email: lucasboneschi@hotmail.com
Orientador: Bruno dos Santos

RESUMO: Em 2002 ocorreu um acidente com a aeronave Boeing 747-200 da empresa China Airlines, provocando 225 vítimas fatais. Pesquisas demonstraram irregularidades no desenvolvimento das manutenções, que provocaram o agravamento do fenômeno de fadiga levando a aeronave ao colapso. O objetivo deste estudo é identificar essas irregularidades, desenvolvendo a partir da metodologia Fast Crack Bounds um modelo matemático que irá prescrever a vida em fadiga. Para isso, efetua-se o levantamento dos dados da aeronave Boeing 747-200 nos órgãos públicos da Administração Federal de Aviação e Flight Safe Fundation. Posteriormente, desenvolve-se um código computacional no ambiente do software Gnu Octave baseado no modelo de Paris-Erdogan. O trabalho identifica as irregularidades no desenvolvimento das manutenções da aeronave e ressalta fatores que contribuem para que o fenômeno de fadiga se agravasse. Foi comprovada uma eficiência computacional de 332 vezes mais rápido que o tempo obtido pela solução numérica de RK4.

Palavras-chave: Boeing 747-200; Acidentes aéreos; Fadiga; Paris-Erdogan; *Fast Crack Bounds*

1. INTRODUÇÃO

As estruturas das aeronaves sofrem variados esforços quando estão em atividade, dentre eles a fadiga. Esse fenômeno se mostrou um problema de grande relevância no estudo de fraturas, aplicações e resistências dos materiais. Segundo Harrison e Findlay (2002), a fadiga em peças de alumínio aeronáutica causa 55% dos acidentes aéreos por falhas mecânicas, sendo o principal causador de desastres aéreos.

Em 2002, um Boeing 747 da China Airlines caiu durante um voo tendo 225 vítimas fatais. O Conselho de Segurança de Aviação (2002) afirma que o fator principal da queda da aeronave foi por fadiga na sua estrutura, com isso o entendimento da propagação de trinca por fadiga é de suma importância para ter o conhecimento da vida útil do material e garantir a segurança da aeronave.

A fadiga é um processo de degradação progressiva e permanente, que provoca a

nucleação das trincas e posteriormente sua completa fratura (ASTM, 1998), dentre os métodos existentes para previsão da vida útil de estruturas sob fadiga destaca-se a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), que se propõe em função das limitações na aplicação dos conceitos tradicionais para prever o comportamento dos materiais quanto à presença de descontinuidades internas ou superficiais, como as trincas (ANDERSON, 2005).

Os modelos de propagação de trinca em geral são desenvolvidos a partir de um problema de valor inicial (PVI). Com isso, o método de Runge- Kutta de ordem 4 (RK4) mais utilizado para obter soluções aproximadas de valor inicial (ASCHER e PETZOLD, 1998). Entretanto, o método *Fast Crack Bounds* (FCB), que consiste em determinar, eficientemente, duas funções que definem cotas superior e inferior para a função tamanho de trinca de alguma lei de propagação de trinca. Sendo o custo computacional do método FCB é muitas vezes menor que o exigido pela integração numérica via método Runge-Kutta de quarta ordem (MACHADO, 2015).

A primeira etapa deste estudo consiste em realizar um levantamento de dados da aeronave Boeing 747-200 nos órgãos públicos da Administração Federal de Aviação e Flight Safe Foundation. Após a coleta de dados, desenvolve-se um código computacional no ambiente do software Gnu Octave baseado no modelo de Paris-Erdogan. A partir disso, realiza-se uma comparação para determinar a eficiência entre o método FCB e RK4.

Considerando isso, o objetivo principal do estudo é compreender o processo de fadiga em aeronaves e verificar qual a consequência desse fenômeno sobre o material, comprometendo sua estrutura e a segurança das aeronaves, bem como provocando acidentes aéreos, e, ainda, entender o processo de propagação de trinca e a vida útil do material e comprovar a eficiência do método FCB diante do RK4 a fim de reduzir custo e tempo.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Panorama histórico dos acidentes aéreos mais graves

Em 25 de maio de 2002, o Boeing 747 da China Airlines iria realizar um voo conforme trajeto descrito na figura 1. Com 19 tripulantes e 206 passageiros a bordo, ao chegar a uma altitude de 35000 pés a aeronave desapareceu, entretanto nenhuma declaração de emergência ou sinal de problema foi relatado pelos pilotos.



Figura 1: Mapa do Estreito de Taiwan.

Fonte: Adaptado de ASC (2002).

Após 25 minutos de voo o avião teve sua fuselagem comprometida e acabou rompendo-se sob o efeito da pressão interna, que resultou em uma descompressão explosiva, fragmentando a aeronave em vários pedaços.

O Conselho de Segurança de Aviação (ASC, 2002) imediatamente lançou uma equipe para conduzir a investigação dessa ocorrência. Ao analisar as autópsias e partes do jato recuperadas, onde apenas 15% da aeronave foi recuperada como demonstra a figura 2, não traziam sinais de fogo, explosivos, danos provocados por mísseis.



Figura 2: Parte da aeronave recuperada

Fonte: ASC (2002).

O ASC encontrou evidências de danos de fadiga na fuselagem de popa inferior, entre os stringers S-48L e S-49L conforme com a figura 3, sob o duplo de reparo perto de sua borda e fora da linha externa de rebites de fixação.

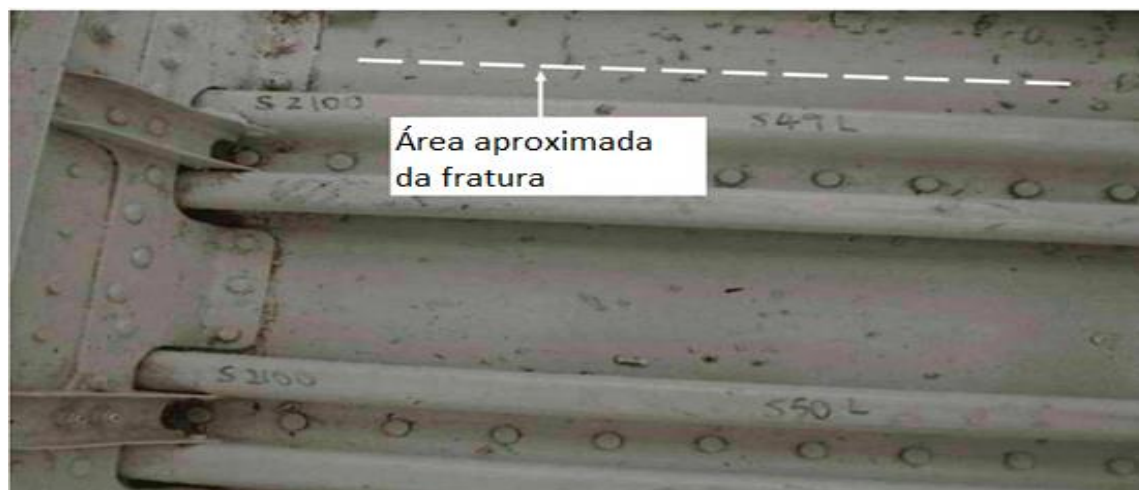


Figura 3: Área aproximada da fratura.

Fonte: ASC (2002).

Múltiplos danos no local, incluindo uma ruptura de fadiga principal de 15,1 polegadas de espessura e algumas pequenas fissuras de fadiga foram confirmadas. Constataram que as fissuras encontradas surgiram a partir do dano de arranhões associados ao incidente de 1980 em Hong Kong, que ao realizar o pouso acabou danificando a cauda contra a pista de pouso.



Figura 4: Placas duplas.

Fonte: ASC (2002).

A área danificada de acordo com a figura 4 não foi removida e as placas duplas que

deveriam ter sido adicionadas com pelo menos 30% de superposição sobre a estrutura da fuselagem onde foi afetada, que é a recomendação do plano de manutenção para manter a margem de segurança e restaurar a força estrutural da aeronave.

Foi constatado que um arranhão mal tratado na pele do vaso de pressão da aeronave, especialmente se coberto sob um duplo de reparo, pode ser um dano oculto que pode evoluir para a fadiga e eventualmente causar colapso estrutural.

2.2 Fadiga

A *American Society for Testing and Materials* (1998) define a fadiga como sendo um processo permanente, localizado e gradual de mudança estrutural que ocorre em um material submetido a condições de carregamento que causam tensões e deformações variáveis que podem culminar em trincas ou falha completa após certo número de flutuações.

A falha por fadiga em componentes mecânicos inicia-se nos pontos mais solicitados, na forma de micro trincas que evoluem e reduzem a resistência estrutural do componente, até que leve à ruptura final. Quando interna, a trinca pode se originar de uma inclusão de material não metálico na matriz, que é uma descontinuidade comum em alguns materiais e pode aparecer em formas diversas sendo que cada uma gerará um comportamento diferente à fadiga. A trinca interna pode ainda surgir de uma mudança de fases, em microestruturas muito heterogêneas (ANDERSON, 1995).

Segundo Callister (2002), a importância da fadiga para aeronáutica se dá no contexto de otimização de manutenção e prevenção de falhas, uma vez que cerca de 90% das falhas mecânicas são causadas pelo processo de fadiga. Norton (2004) afirma que componentes que falham por esse fenômeno geralmente sofrem três estágios separados de crescimento da trinca.

1. Iniciação de uma trinca, sendo influenciado por concentrações de tensões (como defeitos materiais ou fabricação);
2. Propagação da trinca, que se dá pelo crescimento progressivo da trinca;
3. Colapso final.

Eventualmente, quando a trinca propaga-se, atinge um tamanho crítico em que o material perde parte de suas propriedades e sofre uma fratura súbita, causando a quebra do material (DA ROSA, 2002).

Segundo Norton (2013), a falha por fadiga geralmente deixa marcas características na

superfície de fratura, sendo possível deduzir informações se a fratura foi por alto ou baixo nível de tensão e o tipo de esforço que o material estava sujeito, a fim de compreender o rompimento do material.

Grande parte é de fácil visualização, conhecidas como as "marcas de praia", observados macroscopicamente. Marcas de praia são produzidas sempre que ocorre uma alteração significativa no ciclo de carregamento, indicando avanços sucessivos das trincas, salientando os primeiros sinais de que o rompimento ocorreu por fadiga. Fraturas por fadiga tendem a ser relativamente lisas perto da origem, contudo, sobressai-se uma leve ruga na superfície, apontando a progressão da trinca conforme figura 5.

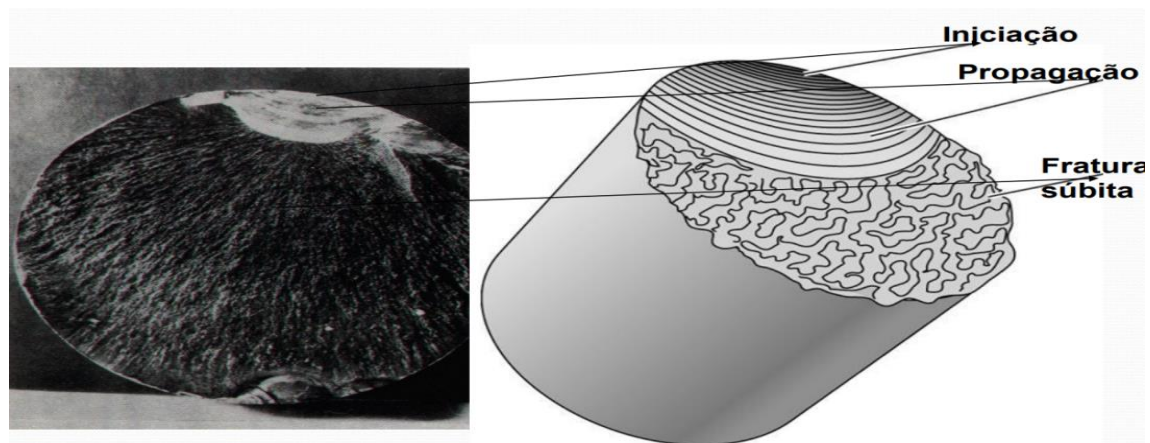


Figura 5: Marcas de praia.

Fonte: Adaptado de Norton (2013).

Para preescrever o crescimento da trinca nas três regiões do diagrama da taxa de propagação de trinca, neste trabalho é considerado a mecânica da fratura linear elástica.

2.3 Mecânica da fratura linear elástica

A metodologia da mecânica da fratura linear elástica (MFLE) é um procedimento analítico que relaciona a magnitude e a distribuição do campo de tensões na vizinhança da ponta da trinca com a tensão nominal aplicada no componente, o tamanho, a forma e orientação da trinca. Desse modo, a MFLE tem como base os fundamentos da teoria da elasticidade (ANDERSON, 2005) e segundo Bannantine *et al.* (1989) desenvolve-se a partir das seguintes hipóteses:

(H1). Existência de uma trinca;

- (H2). Material elástico linear, isotrópico e homogêneo;
- (H3). Pequenas deformações;
- (H4). Estado plano;
- (H5). Modos de carregamento.

Conhecendo as hipóteses de trabalho é adequado definir as componentes de tensão e sistemas de referência nas proximidades da trinca conforme a figura 6.

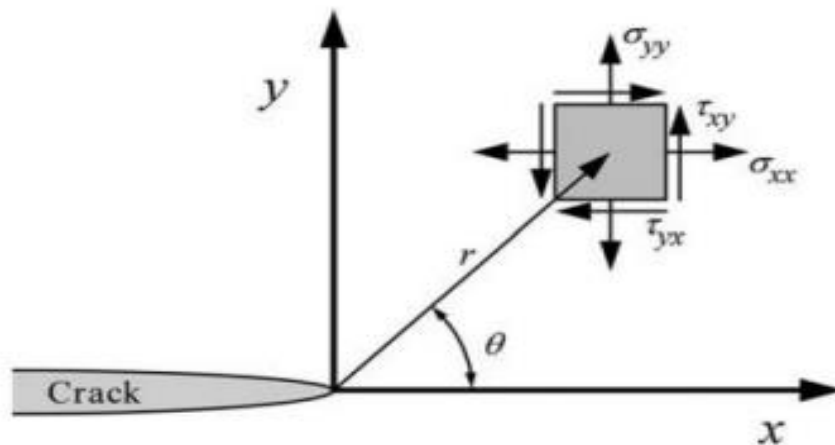


Figura 6: relação entre o sistema de coordenadas polares e os estados de tensão.

Fonte: Anderson (2005).

Visualiza-se a relação entre o sistema de coordenadas polares e os estados de tensão em um elemento situado próximo a ponta da trinca. Como resultado, três modos de carregamento podem ser definidos com base nessa relação. O modo I é definido como simétrico em ambos os planos x-y e x-z. No modo II, os movimentos são simétricos no plano x-y, mas anti-simétricos no plano x-z. Os modos de movimento III referem-se a deslocamentos que são assimétricos com os planos x-y e x-z. Esses modos correspondem a outros movimentos relativos de duas superfícies de trincas como uma composição dos modos descritos anteriormente.

2.4 Modelo de propagação de trinca

A mecânica da fratura linear elástica e a taxa de propagação de trinca (da/dN) são proporcionais à intensidade de tensão do fator (ΔK). Observa-se na figura 7, a região I representa o crescimento de trincas próximo ao linear. A região II representa a propagação de

trinca na região plástica onde a taxa de propagação da trinca é linearmente proporcional a ΔK (escala logarítmica), onde é aplicada a mecânica da fratura linear elástica. Na região III é onde sua evolução acelera, levando o mecanismo à falha. .

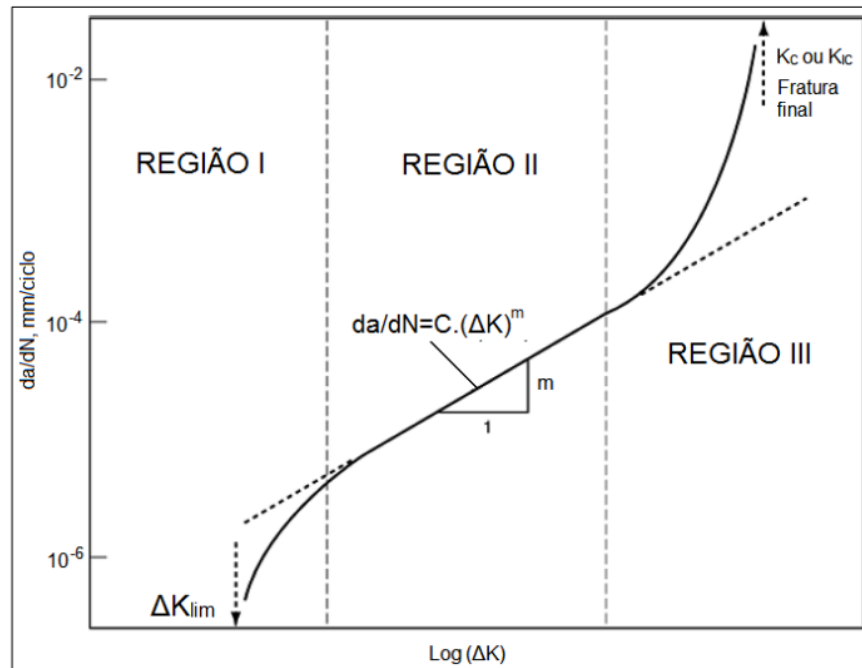


Figura 7: Curva de log-log $da/dN \times \Delta K$.

Fonte: Adaptado de ASM handbook (1998).

Segundo Paris (1963), seu equacionamento descreve a região II, onde a evolução da trinca é linear.

2.5 Modelo de Paris-Erdogan

Conforme Paris (1962), a propagação de trinca de fadiga foi correlacionada com diversos parâmetros da MFLE. Esse modelo não considera os efeitos de tensão média, condição de falha estática e um limite para fadiga. O modelo de Paris-Erdogan é formulado através do seguinte PVI:

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m$$

[1]

Sendo que “ ΔK ” é a variação do fator de intensidade e define-se conforme a equação:

$$\frac{da}{dN} = C \times [\sqrt{\pi a} \times f(a) \times \Delta\sigma]^m \quad [2]$$

Por meio de ensaios, encontraram-se valores empíricos para várias classes de aços apresentados na tabela 2. Relacionados ao expoente “ m ” e o coeficiente “ C ”, Barsom (1976). Esses parâmetros dependem da frequência do carregamento, a razão de tensão, o meio ambiente, o intervalo de variação do fator intensidade de tensão, a temperatura, dentre outros (CAVALLINI, IACOVIELLO, 1991). Com isso, tem-se os valores das constantes e aplica-se o método Runge-Kutta para resolução do PVI.

2.6 Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta consiste em uma técnica de resolução do PVI proposto. Sendo de fácil utilização para a solução exata de uma equação diferencial ordinária pelos primeiros termos da expansão em série de Taylor, integra os métodos de Euler e Euler implícito. Tendo como principal vantagem a precisão, com erro de truncamento que se encontra na ordem de h^4 (BOYCE, 2006). Sendo o método de Runge-Kutta de ordem 4 (RK4) mais utilizado para obter soluções aproximadas de valor inicial (ASCHER, PETZOLD, 1998). Entretanto, a aplicação do RK4 tem um esforço computacional elevado em comparação ao método FCB aplicado em Paris.

2.6.1 Método de Runge-Kutta de quarta ordem

Substituindo “ t_0 ” por “ t_n ” e “ t ” por “ $t_{n+1} = t_n + h$ ”, a equação (2.13) equivale a:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + x'(t_n) \times h + \dots + \frac{h^k}{k!} \times x^{(k)}(t_n) + \frac{(h)^{k+1}}{(k+1)!} \times x^{(k+1)}(t_n) \times \xi \quad [3]$$

Onde “ ξ ” representa um número entre “ t_n ” e “ t_{n+1} ”. Substituindo $k = 4$ na equação 3.

$$\begin{aligned}
x(t_{n+1}) &= x(t_n) + x^i(t_n) \times h + \frac{h^2}{2!} \times x^{ii} \times (t_n) + \frac{h^3}{3!} \times x^{iii} \times (t_n) + \frac{h^4}{4!} \\
&\times x^4 + \frac{h^5}{5!} \times x^5 \times \xi
\end{aligned} \quad [4]$$

Com $\xi \in (tn, tn+1)$. Buscando encontrar as constantes que respeite:

$$x_{n+1} = x_n + h \times (ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4) \quad [5]$$

Sendo as constantes k_1, k_2, k_3 e k_4 dadas por:

$$\begin{cases}
k_1 = f \times (t_n, x_n) \\
k_2 = f(t_n + a_1 h, x_n + \beta_1 h k_1) \\
k_3 = f(t_n + a_2 h, x_n + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_2) \\
k_4 = f(t_n + a_3 h, x_n + \beta_4 h k_1 + \beta_5 h k_2 + \beta_5 h k_3)
\end{cases} \quad [6]$$

Portanto, o sistema a equação do modelo RK4 é dada por:

$$\begin{cases}
y_{y+1} = y_n + \left(\frac{h}{6}\right) \times (f(K_1) + 2f(K_2) + 2f(K_3) + f(K_4)) \\
K_1 = y_n \\
K_2 = y_n + \left(\frac{h}{2}\right) f(K_1); \\
K_3 = y_n + \left(\frac{h}{2}\right) f(K_2); \\
K_4 = y_n + (h) f(K_3);
\end{cases} \quad [7]$$

Sendo “ K_1 ” é o coeficiente angular no extremo esquerdo do intervalo, “ K_2 ” é o coeficiente angular no ponto médio, “ K_3 ” é a segunda aproximação do coeficiente angular do ponto médio e “ K_4 ” é o coeficiente angular em $(x_n + h)$. A soma $(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$ também pode ser interpretada como coeficiente angular médio (BOYCE e DIPRIMA, 2006).

2.7 Fast Crack Bounds

A metodologia “Fast Crack Bounds” (FCB) foi apresentada nos trabalhos de Ávila e Santos (2015) e Machado Jr. (2015). Segundo Ávila e Santos (2015) tem como objetivo

estabelecer cotas inferiores e superiores para a função de tamanho de trinca. Procura-se estabelecer cotas que “envelopam” a solução do problema de valor inicial (PVI) do modelo de propagação de trincas. Considerando-se um modelo de propagação do tipo CATC, formula-se o seguinte PVI.

$$\begin{cases} \text{Encontrar } a \in C^1, \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = h(\alpha, \Delta K), \forall N \in (N_0, N_1) \\ a(N_0) = a_0. \end{cases} \quad [8]$$

O método FCB desenvolve-se a partir de hipóteses adequadas, que garantem a regularidade suficiente para que a função tamanho de trinca seja expandida, exatamente via série de Taylor com resto de Lagrange, conforme Santos (2015):

$$a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(n)(N - N_0)^2, \text{ com } n \in [N_0, N] \quad [9]$$

O método Fast Crack Bounds (FCB) propõe, a partir da série de Taylor retendo termos até segunda ordem, com resto de Lagrange utilizando as hipóteses, quando necessárias, com majorações adequadas, obter cotas da seguinte forma:

$$a^i(N) \leq a(N) \leq a(N), \forall N \in [N_0, N] \quad [10]$$

Sendo $a(N)$, $a(N)$ e $a(N)$, a cota inferior, a função tamanho de trinca e a cota superior, respectivamente (Ávila *et al.*, 2016).

3 METODOLOGIA CIENTÍFICA

A pesquisa é desenvolvida em 3 etapas descritas a seguir:

- (i) A primeira etapa consiste em realizar um levantamento de dados da aeronave Boeing 747-200, sucedido do método FCB aplicado ao modelo de Paris, sendo efetuada sua formulação matemática com intuito de realizar a determinação das cotas inferior e superior para o modelo de trinca.

- (ii) A segunda etapa representa a execução do método FCB aplicado ao modelo de Paris, sendo efetuada sua formulação matemática com intuito de realizar a determinação das cotas inferior e superior para o modelo de trinca.
- (iii) A terceira etapa ocorre dentro do ambiente computacional. Sendo o *Gnu Octave* 7.2.0 o software escolhido para o processo, pois é uma ferramenta de resolução de problemas numéricos complexos lineares e não-lineares, e open source. Nessa etapa, serão desenvolvidos algoritmos de base, com o intuito de simular os modelos matemáticos propostos, sendo eles FCB e Runge-Kutta de quarta ordem, aplicados ao modelo de propagação de trinca de Paris.

3.1 Levantamento de dados

Segundo a ASC (2002), a área danificada da aeronave no incidente de 1980 foi a fuselagem ilustrada na imagem 8, tendo diversos arranhões, de até 508mm de comprimento e 0,2438mm de profundidade, a evolução das trincas chegaram a um comprimento de até 1305mm comprometendo a segurança da aeronave.

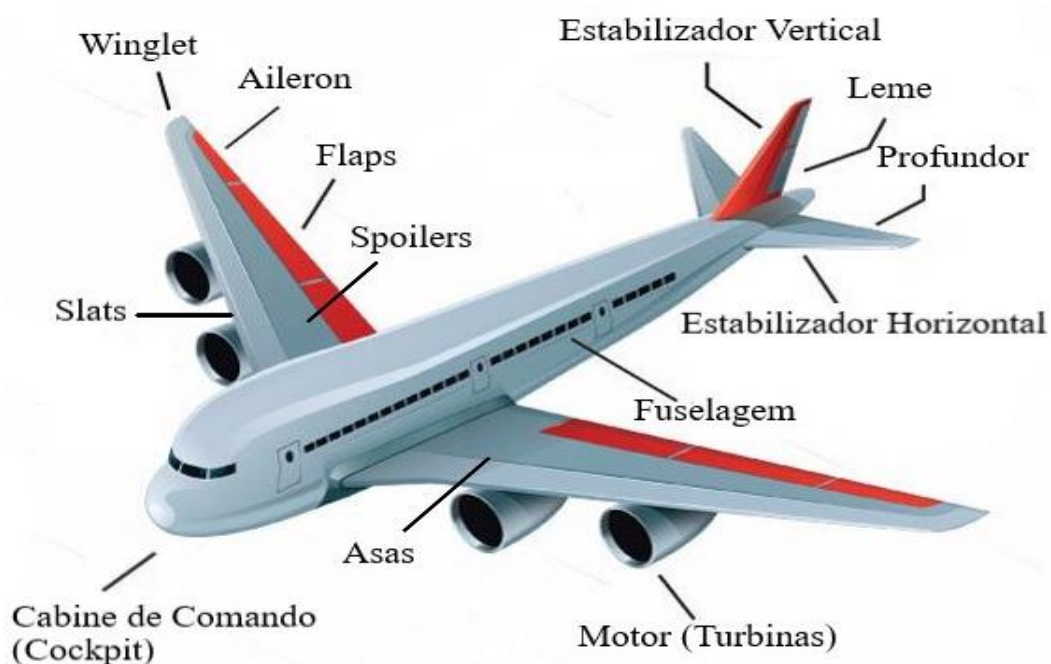


Figura 8: Partes de uma aeronave

Fonte: Adaptado de ASC (2002).

Conforme a tabela 1, a fuselagem é fabricada de alumínio 2024.

Tabela 1: Liga de alumínio em cada peça da aeronave.

PEÇA	LIGA DA PEÇA
Frames (Vigas Transversais)	Liga de Alumínio - 2024 e 7075
Stringers (Longarinas)	Liga de Alumínio – 7075
Keel beams (Vigas de quilha)	Liga de Alumínio – 7075
Skin (Revestimento de fuselagem)	Liga de Alumínio – 2024
Floor Beams (Vigas do piso)	Liga de Alumínio – 7075
Wings (Asas)	Liga de Alumínio - 2024 e 7075

Fonte: Davis (1993).

Seguindo a tabela de Barsom (1976) sobre a composição dos materiais, adota-se C e M como liga de alumínio de acordo com a tabela 2.

Tabela 2: Constantes relacionadas ao material ensaiado.

Material	m	C (m/ciclo)
Aço carbono	3,3	$0,24 \cdot 10^{-11}$
Aços estruturais	3,85 - 4,20	$0,07 \cdot 10^{-11}$ a $0,11 \cdot 10^{-11}$
Ligas de alumínio	2,6 - 3,9	$3 \cdot 10^{-11}$ a $19 \cdot 10^{-11}$
Cobre	3,9	$0,34 \cdot 10^{-11}$
Titânio	4,4	$68,8 \cdot 10^{-11}$

Fonte: Adaptado de Barsom (1976).

3.2 Desenvolvimento da metodologia *Fast Crack Bounds* para o modelo Paris-Erdogan

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \in C^1(N_0 N_1) \text{ tal que:} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C (\Delta \sigma \sqrt{\pi a(N)} f(a(N)))^m \times \forall N \in (N_0, N_1): \\ a(N_0) = a_0. \end{array} \right. \quad [11]$$

Com isso, a equação 11 é um PVI, definida por uma equação diferencial autônoma, não-linear ordinária de primeira ordem. Basicamente, a equação 11 pode ser considerada

como um problema que consiste em encontrar as trajetórias que satisfazem a equação diferencial do PVI e o valor inicial, $(a(N_0) = a_0)$. A única solução para esse problema depende de algumas condições ao lado direito da equação 11. O intervalo (N_0, N_1) corresponde aos ciclos de carga

3.2.1 Limite superior e inferior para o crescimento do tamanho da trinca

O limite superior e inferior para a função de tamanho de trinca são determinados com base nas seguintes hipóteses sobre o carregamento e a função geométrica.

$$H1: \Delta\sigma(N) = \Delta\sigma_0, \forall N \in [N_0, N_1]:$$

$$H2 = \begin{cases} f \in C^1([a_0, a_1]; R^+ \setminus \{0\}); \\ 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y) \leq f(a_1), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y) \leq f'(a_1), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{cases} \quad [12]$$

$$H3: m \geq 2;$$

Sendo $a_0 = a(N_0)$ and $a_1 = a(N_1)$, a hipótese 1 (H1): Declara ser carregamento constante; Hipótese 2 (H2): Declara que sua função geométrica e sua derivada devem ser funções não decrescente. Essas condições são atendidas para as funções geométricas mais comuns, pois representam uma característica intrínseca no problema de propagação de trinca. As hipóteses (H1) e (H2) formam a base para o seguinte teorema, que define o limite superior e inferior para a função do tamanho de trinca.

Teorema: Seja $f(\cdot)$ e $\Delta\sigma(\cdot)$ são funções que satisfazem as hipóteses (H1) e (H2), logo, $a^* \in [a_0, a_1]$, o limite superior e inferior são validos:

$$\begin{cases} a(N) - a_0 \leq C \left\{ (\Delta K(a_0))^m + \left(\frac{mC}{2}\right)(\Delta K(a^*))^{2m} \right. \\ \quad \left. x \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f}\right)(a^*) \right] (N - N_0) \right\} \\ a(N) - a_0 \geq C(\Delta K(a_0))^m \left\{ 1 + \left(\frac{mC}{2}\right)(\Delta K(a_0))^m \right. \\ \quad \left. x \left[\frac{1}{2a_0} + \left(\frac{f'}{f}\right)(a_0) \right] (N - N_0) \right\} \end{cases} \quad [13]$$

Prova: Sobre (H2) e a expansão de Taylor de segunda ordem do tamanho da trinca, em torno de a_0 , obtemos,

$$a(N) = a_0 + \left(\frac{da}{dN}(N_0) \right) (N - N_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2a}{dn^2}(n) \right) (N - N_0)^2. \text{ with } n \in [N_0, N] \quad [14]$$

O termo de segunda ordem é chamado de resto de Lagrange. A partir da (H2), as seguintes desigualdades podem ser escritas:

$$a(s) \leq a(t), s \leq t \text{ with } s, t \in [N_0, N] \rightarrow (a(s))^m \leq (a(t))^m \quad [15]$$

Com isso, obtém-se:

$$a(f(s))^m \leq (f(t))^m \rightarrow \left(\frac{1}{a^2 f} \right)^m (s) \leq \left(\frac{1}{a^2 f} \right)^m (t), s \leq t \text{ with } s, t \in [N_0, N]. \quad [16]$$

Pode-se concluir que

$$(\Delta K)^m(a(s)) \leq (\Delta K)^m(a(t)). \quad [17]$$

Desde que $C > 0$ podemos obter

$$\frac{da}{dN}(s) \leq \frac{da}{dN}(t), s \leq t \text{ with } s, t \in [N_0, N]. \quad [18]$$

A segunda derivada da função de propagação de trinca pode ser avaliada por

$$d^2a(a(N)) = \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dN}(a) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) \quad [19]$$

$$\begin{aligned}
&= C^2 (\Delta \sigma \sqrt{\pi})^{2m} \frac{d}{da} \left(a^{\frac{m}{2}} (f(a))^m \right) \left(a^{\frac{m}{2}} f(a) \right)^m \\
&= m C^2 (\Delta \sigma \sqrt{\pi})^{2m} \left[\frac{1}{2} a^{\frac{m}{2}-1} (f(a))^m + a^{\frac{m}{2}} (f(a))^{m-1} f'(a) \right] \left(a^{\frac{m}{2}} (f(a))^m \right) \\
&= m C^2 (\Delta \sigma \sqrt{\pi})^{2m} [f(a) \sqrt{a}]^{2m} \left[\frac{1}{2a} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a) \right] \\
&= m C^2 (\Delta \sigma \sqrt{\pi})^{2m} \left[\frac{1}{2a} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a) \right]
\end{aligned}$$

Adicionando a Eq. 19 na Eq. 14, a função de expansão de Taylor de tamanho de trinca se torna

$$\begin{aligned}
a(N) - a_0 &= c (\Delta K(a_0))^m (N - N_0) \\
&+ \frac{m C^2}{2} (\Delta K(a(n)))^{2m} \left[\frac{1}{2a(n)} \right. \\
&\left. + \left(\frac{f'}{f} \right) (an) \right] (N - N_0)^2. \text{ with } n \in [N_0, N]
\end{aligned} \tag{20}$$

O limite superior e inferior pode ser obtido através da reformulação do resto de Lagrange na Eq 20. A partir do comportamento da função geométrica de correção na (H2), a seguinte desigualdade é proposta:

$$\begin{aligned}
&[f(a) \sqrt{a}]^{2m} \left[\frac{1}{2} f(a) + a f'(a) \right] \\
&\leq [\sqrt{a^*} f(a^*)]^{2m} \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a^*) \right], \forall a \in [a_0, a_1]
\end{aligned} \tag{21}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
&[[f(a) \sqrt{a}]^{2m} \left[\frac{1}{2} f(a) + a f'(a) \right] \\
&\geq [\sqrt{a_0} f(a_0)]^{2m} \left[\frac{1}{2a_0} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_0) \right], \forall a \in [a_0, a_1]
\end{aligned} \tag{22}$$

3.3 Implementação computacional

Para a comparação e análise dos métodos Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) e a metodologia *Fast Crack Bounds* (FCB) aplicado ao modelo de Paris, desenvolve-se um algoritmo no ambiente de software *GNU Octave*, versão 7.2.0 e executados em um computador com processador AMD Ryzen 5 3550H with Radeon Vega Mobile Gfx (2.10 GHz) e memória RAM de 16GB. O algoritmo resultante executará uma comparação entre soluções numéricas obtidas pelo método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) e o método *Fast Crack Bounds* (FCB) do modelo de Paris.

4 RESULTADOS OBTIDOS

Os parâmetros aplicados ao algoritmo foram retirados dos trabalhos de Barsom (1976) e Conselho de Segurança de Aviação (2002). Com isso, a tabela 3 informa as variáveis utilizadas no modelo de Paris, sendo " m " e " C " parâmetros do material, " $N1$ " o número de ciclos final da simulação, " $a0$ " o tamanho inicial da trinca, " $\Delta \sigma$ " a tensão que o material esta sujeito e " b " a largura da placa.

Tabela 3: Dados utilizados nas simulações numéricas

Parâmetros (Representação)	Valor numérico	Unidade
Número de Passos	900000	ciclos
Constante liga de alumínio (C)	7×10^{-12}	m/ciclo
Constante liga de alumínio (M)	2	Adimensional
$\Delta \alpha$	200	MPa
Número de ciclo inicial (N0)	0	ciclo
Número de ciclo final (N1)	9×10^5	ciclo
Tamanho de trinca inicial (a0)	0,001	metros
Largura da placa (b)	0,1	metros

Fonte: ASC (2002), Barsom (1976).

Os resultados da função tamanho da trinca, obtidos pelo método RK4, e os limites superior e inferior calculados, são mostrados na figura 9 em que se evidencia o desvio relativo dos limites superior e inferior. Observa-se que os limites aqui propostos são bastante estreitos, fornecendo estimativas precisas da função de tamanho real da trinca.

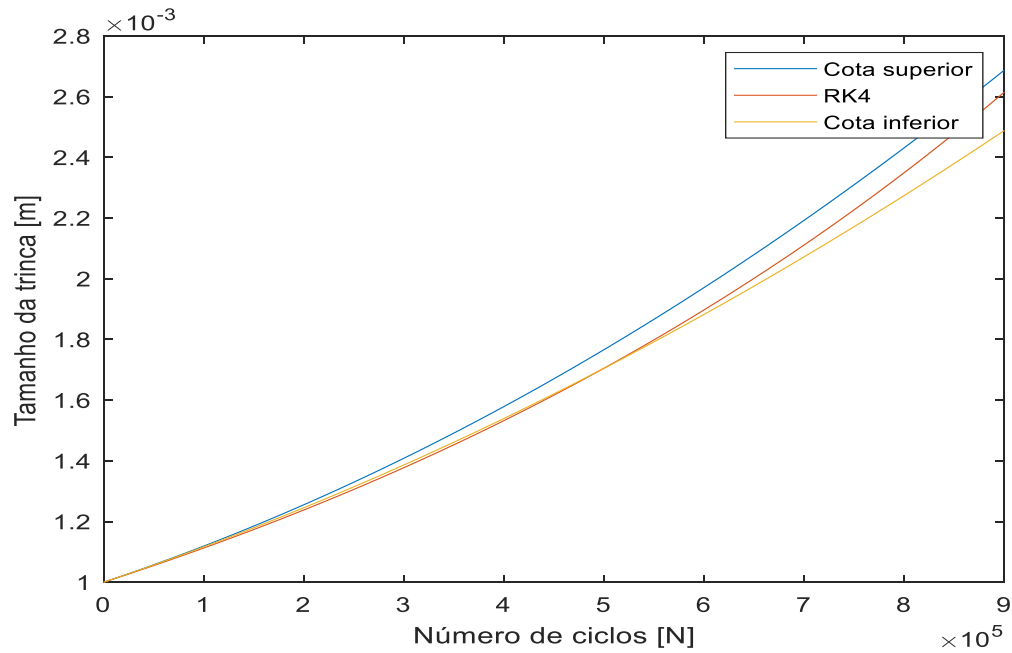


Figura 9: Função de tamanho de trinca e limites superior e inferior.

Fonte: Autor (2022).

Observa-se a figura 10, a solução numérica através do método FCB para a função tamanho de trinca, bem como os valores superiores e limites inferiores. Observa-se que o primeiro momento estatístico satisfaz a desigualdade na equação 11. Obedecendo adequadamente a metodologia FCB.

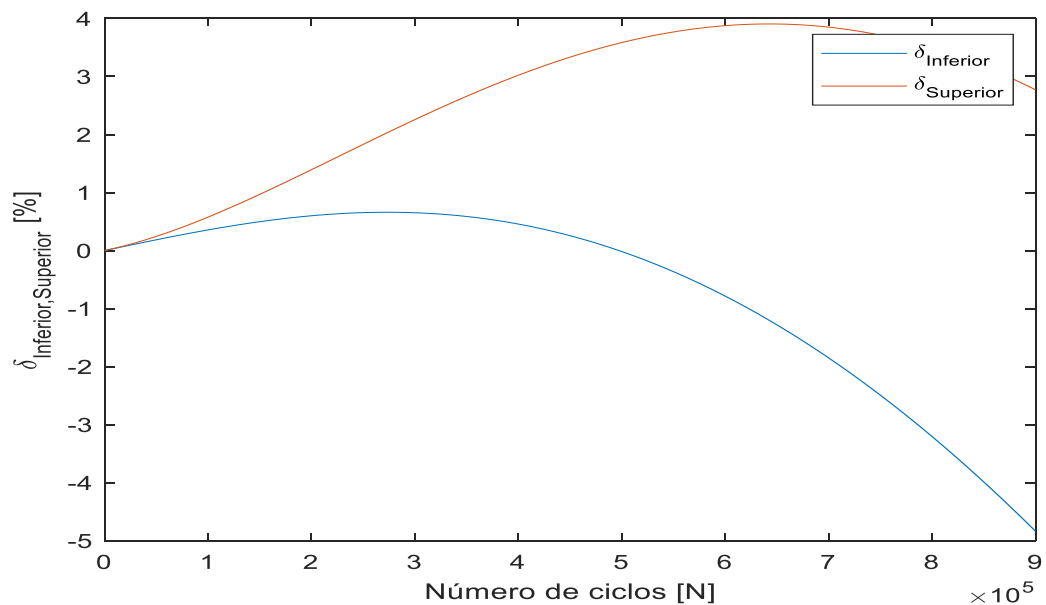


Figura 10: Desvio relativo dos limites superior e inferior.

Fonte: Autor (2022).

Analisando a figura 10, foi possível observar o desvio relativo do primeiro momento estatístico e, assim, afirmar que o desvio máximo para a cota superior é igual a 3,95 e para a cota inferior é igual a -4,85.

Calcular os limites por cotas levou apenas 0,0058835 segundos, enquanto a integração numérica RK4 levou 1,9491556 segundos. O trabalho identifica ganhos computacionais de tempo da metodologia FCB na ordem de 332 vezes menor ao obtido pelo RK4. Validando a eficiência da metodologia FCB para a análise do fenômeno tamanho de trinca.

5 CONCLUSÃO

Este documento consiste em um trabalho de conclusão de curso de Engenharia Mecânica do Centro Universitário Assis Gurgacz, no campus Cascavel, tendo como área de concentração da mecânica dos sólidos computacional. O tema da pesquisa intitula-se “Estudo do acidente aéreo de um Boeing 747-200 da China Airlines: Uma estimativa de vida em fadiga baseado na aplicação da metodologia *Fast Crack Bounds*”, sob a orientação do Prof. Mestre. Bruno dos Santos.

O presente trabalho teve como objetivo realizar a análise da propagação de uma trinca por fadiga e vida útil da mesma, através do código matemático de modelo de Paris Erdogan. A partir disso, utilizou-se conjuntamente os métodos de Rk4 e o modelo de propagação de trinca de Paris Erdogan via *Octave*, para se estimar o tamanho da trinca.

Pôde-se observar a redução do custo computacional e esforço, quando comparado com a integração numérica direta (RK4), podendo validar a eficiência da metodologia FCB para análise do fenômeno propagação de trinca, apresentando tempos computacionais reduzidos de 332 vezes comparado com a solução RK4.

Com este estudo pôde-se validar a eficiência do modelo matemático desenvolvido para prever o tempo para a falha, em razão da metodologia de analisar a trinca da aeronave conforme seu material, carregamentos e ciclos de vida. O exemplo apresentado neste trabalho é um caso notório de um acidente aéreo que ocorreu devido à fadiga mecânica, com intuito de estudar a propagação de uma única trinca, comprovando que se a equipe da China Airlines tivesse conhecimento da metodologia FCB, as manutenções teriam custo e tempo reduzidos, tornando-se mais eficaz controlar a propagação da trinca e assim, e possivelmente, evitar o acidente aéreo.

REFERÊNCIAS

Anderson, T.L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**, Third Edition. New York; CRC Press, 2005.

AMERICAN SOCIETY FOR METALS. ASM Handbook. **Fatigue and Fracture**. Vol. 19. Usa: ASM international, 1998.

ASCHER, U. M.; PETZOLD, L. R. **Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations**. 1. ed. Philadelphia: SIAM, 1998.

Aviation-Safety. **Relatório final 2002**. Disponível em: https://reports.aviation-safety.net/2002/20020525-0_B742_B-18255.pdf/. Acesso em: 11 Jul. 2022.

ÁVILA, S. Jr. C. R.; SANTOS, Rodrigo Villaca. Bounds for the Propagation Model of Crack Forman. **International journal of sciences: basic and applied research**. v. 22, n. 2, p. 219-231, 2015.

ÁVILA, S. Jr. C. R.; SANTOS, Rodrigo Villaca; BECK, A. T. Analytical Bounds for Efficient Crack Growth Computation. **Applied mathematical modelling**, .v. 40, p. 2312-2321, 2016.

BANNANTINE, J. A.; COMER, J.J.; HANDROCK, J. L. **Fundamentals of Metal Fatigue Analysis**. Prentice Hall, 1989.

BARSOM, J. M. Fatigue crack growth under variable amplitude loading in various bridge steels. Fatigue Crack Growth under Spectrum Loads. **American Society for Testing and Materials**. v. 595, p. 217-235. 1976.

BARSOM J. M.; ROLF S. T. **Fracture and fatigue control in structures: Applications of fracture mechanics**. 3 ed. Philadelphia: ASTM, 1999.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valor de contorno**. 8 ed. LTC, 2006.

CALLISTER JR., WILLIAM D., **Ciência e Engenharia dos Materiais: Uma Introdução**, 1a ed., Rio de Janeiro, LTC, 2002.

CAVALLINI, M.; IACOVIELLO, F. Fatigue models for Al alloys. **International Journal of Fatigue**. v. 13, p. 442-446. 1991.

DA ROSA, EDSON. **Análise de Resistência Mecânica (Mecânica da Fratura e Fadiga)** Grupo de Análise e Projeto Mecânico, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina 2002.

DAVIS, J. ASM Specialty Handbook: **Aluminum and aluminum alloys**, 1993.

DOWLING, N. E. **Mean Stress Effects in Stress-life and Strain-life Fatigue**. SAE Technical Paper 2004-01-2227, 2004

DOWLING, N. E. **Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and fatigue**, 4 ed., Pearson Education, Harlow, 2013.

Findlay, S., Harrison, N. (2002) **Why aircraft fail**.

NORTON, Robert L. **Projeto de máquinas [recurso eletrônico]: uma abordagem integrada** / Robert L. Norton ; [tradução: Konstantinos Dimitriou Stavropoulos ... et al.]. – 4. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre: Bookman, 2013.

PARIS P, ERDOGAN F, 1963. **A critical analysis of crack propagation laws**, J. Basic Eng., Trans.ASME., 85: 528-534.